Toets Analyse 1 (Wiskunde)

Maandag 24 oktober 2011, 10:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **vijf** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.

1.) Bepaal de volgende limieten (zonder gebruik te maken van een regel van l'Hôpital):

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x\left(\sqrt{e^{2x}+x^{2011}e^{-x}+1}-\sqrt{e^{2x}+x^{-1/2011}(\ln x)^{2011}}\right)$.

2.) Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\leq -\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] \dfrac{x+\pi}{x+2\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0,\\[2ex] \dfrac{x+1}{2x+1+\sqrt{1+x^2}}, & x\geq 0. \end{cases}$$

(a) Is f continu in $x=-\frac{\pi}{2}$? Beargumenteer!

(b) Is f differentieerbaar in $x=0$? Beargumenteer!

3.) Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x)=\begin{cases} -e^{-x^3}, & x\leq 0,\\[2ex] x^2-1, & x>0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat f injectief ("1-1") op zijn domein is.

(b) Laat zien dat het bereik van f geheel $\mathbb{R}$ is.

(c) Bepaal een functievoorschrift voor de inverse f^{-1} van f op $\mathbb{R}$.

Zie ommezijde

4.) De kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

(a) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan K in het punt $(1, 1)$.

(b) In welke punten van K is de raaklijn evenwijdig aan de lijn $y = x$?

5.) Laat de functie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar zijn. Fixeer een punt x_0 in (a, b) en beschouw de lineaire benadering van f door $L : (a, b) \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

We vragen ons af hoe goed de benadering van f door L is op (a, b).

(a) Formuleer, voor x in (a, b), de uitspraak van de Middelwaardestelling voor de functie f en de punten x_0 en x.

(b) Veronderstel dat er een $M \geq 0$ is, zodanig dat $|f''(x)| \leq M$ voor alle x in (a, b). Laat zien dat

$$|f(x) - L(x)| \leq M(x - x_0)^2$$

voor alle x in (a, b).

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	6 (3+3)	7 (3+4)	11 (4+3+4)	8 (4+4)	8 (3+5)	40