Tentamen Analyse 1 (wis)

Maandag 9 januari 2012, 14:00-17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **vijf** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.

1.) De functie $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}, & \text{voor } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{2}e^{-x}(x-1)^2, & \text{voor } x > 0. \end{cases}$$

(a) Is f continu in 0? Beargumenteer het antwoord.

(b) Bepaal de afgeleide van f op zijn domein, behalve in het punt $x = 0$.

(c) Bepaal alle asymptoten (horizontaal, verticaal, schuin) van f.

(d) Toon aan dat f strikt stijgend is op $(-\infty, 0]$.

(e) Bepaal alle extrema van f op zijn domein. Geef niet alleen plaats en grootte, maar vermeld ook of het om een maximum of een minimum gaat en stel, zonder een rekenmachine te gebruiken, vast of het betreffende extremum lokaal of globaal (absoluut) is.

2.) Beargumenteer of de volgende reeks convergent of divergent is. Geef duidelijk aan welke stellingen gebruikt worden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{n^2}.$$

Zie ommezijde

3.) (a) Bepaal de verzameling van alle x waarvoor de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 x^n$$

convergeert.

(b) Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat de functie $F\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(s) = \int_{s^2}^{2s^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 x^n \right) dx, \quad s \in (-\delta, \delta),$$

differentieerbaar is op $(-\delta, \delta)$. Geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

(c) Bepaal de Taylorreeks van F' rond 0.

4.) Laat $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = \ln x$.

(a) Bereken het eerste orde Taylorpolynoom van f rond $a = e^2$.

(b) Toon (zonder een rekenmachine te gebruiken) aan dat

$$\frac{159999}{80000} + \frac{1}{100e^2} < \ln\left(e^2 + \frac{1}{100}\right) < 2 + \frac{1}{100e^2}.$$

5.) Bereken de volgende bepaalde dan wel onbepaalde integralen:

(a)

$$\int \ln(1+x)\, dx,$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx,$$

(c)

$$\int \frac{8x+3}{4x^2+4x+10}\, dx.$$

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	26 (3+4+6+4+9)	6 (6)	23 (9+7+7)	17 (6+11)	28 (9+9+10)	100