Tussentoets Analyse 2

Dinsdag 15 maart 2005, 9:00-11:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Deze toets bestaat uit **drie** (3) opgaven!
- Herinner, dat

$$\cos 2x \;=\; 2\cos^2 x - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 x \;=\; \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Succes!

1.) Zij $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} \;+\; F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} \;+\; F_3(x,y,z)\,\mathbf{k} \\ &= xz\ln y\,\mathbf{i} \;+\; \cos(yz)\mathbf{j} \;+\; (x^2+z^2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

en $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door $f(x,y,z) = F_1(x,y,z) = xz\ln y$.

(a) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{F}(x,y,z)$.

(b) Bepaal div $\mathbf{F}$ en grad f.

(c) Bereken de lineaire benadering van f rond het punt $(2,1,3)$.

2.) Laat C de kromme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 = 4,\ y \geq 0\}$ met een oriëntatie tegen de klok in zijn.

(a) Geef een parametrisatie $\mathbf{r}(t)$ van de kromme C. Bepaal de snelheid $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ en de grootte (i.e. lengte) van deze snelheid.

Zij $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door $g(x,y) = x^2 - xy$.

(b) Bereken de lijnintegraal $\int_C g ds$.

Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\mathbf{G}(x,y) = x^2\mathbf{i} \;-\; xy\mathbf{j}.$$

(c) Bepaal de lijnintegraal van de tangentiële component van $\mathbf{G}$ langs de kromme C met bovenstaande oriëntatie:

$$\int_C \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r}$$

.

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Laat D het begrensde gebied in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ zijn van punten (x, y) die boven de lijn $y = x^2$ liggen en waarvoor $y \leq 1$. Laat $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de continue functie zijn, gedefinieerd door:

$$h(x, y) = xe^{-y^2}.$$

(a) Bereken $\int_D h(x, y)\, dA$.

Zij $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\mathbf{H}(x, y) = e^{-x^2}\ \mathbf{i}\ + x^2 e^{-y^2}\ \mathbf{j}.$$

De rand van D, ∂D, heeft de positieve (ook wel standaard-) oriëntatie geïnduceerd door D.

(b) Bepaal $\oint_{\partial D} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r}$.