== Tentamen Analyse 2 ==

Maandag 29 mei 2006, 10:00-13:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **drie** opgaven.

Succes!

1.) Zij C de snijlijn van $z = x^2 + y^2$ met het vlak $x = y$ waarvoor $z \leq 2$ met oriëntatie van het punt $(1, 1, 2)$ naar $(-1, -1, 2)$ en laat $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\ \mathbf{i}\ +\ xy\ \mathbf{j}\ +\ z\ \mathbf{k}.$$

(a) Bereken de lijnintegraal

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Zij S het oppervlak wat boven $z = x^2 + y^2$ en onder $z = 2$ op het vlak $x = y$ ligt, met oriëntatie gegeven door het normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ met negatieve y-component.

(b) Schets S en geef duidelijk de oriëntatie aan op S. Geef in dezelfde schets ook duidelijk de oriëntatie aan op de rand van S die geïnduceerd wordt door de oriëntatie van S.

(c) Bereken curl $\mathbf{F}$.

(d) Bereken de flux

$$\int_S \text{curl } \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\ dS.$$

2.) Laat $D \subset \mathbf{R}^3$ het begrensde volume zijn dat onder het oppervlak $z = 4 - x^2 - 2y^2$ en boven het vlak $z = 1$ ligt.

(a) Bereken het volume van D.

Laat $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ z = 4 - x^2 - 2y^2,\ z \geq 1\}$ met een normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ op dit oppervlak dat naar binnen gericht is (d.w.z. wijst naar het gebied D).

(b) Bepaal de flux door S van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i}\ +\ y^2\mathbf{j}\ +\ 3z(1 - y)\mathbf{k}$, dat wil zeggen

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\ dS.$$

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = xy(x+2y-2)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ xy < 1, 0 < y < 2, 0 < x < 2\}, \\ \partial R &= \text{de rand van } R, \\ \bar{R} &= \partial R \cup R \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x,y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f vier kritieke punten op $\mathbf{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f één extremum heeft in R. Geef aan of dit extremum een maximum of minimum is. Licht uw antwoord toe.

(d) Bepaal de extrema van de functie f beperkt tot ∂R. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.
(*Hint:* Bedenk dat $f = 0$ op de lijnen $x = 0$ en $y = 0$.)

(e) Bepaal de extremen van f op $\bar{R}$ (i.e. plaats, aard en grootte - zie (d)).