Tussentoets Analyse 2

Dinsdag 13 maart 2007, 9:00-11:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Deze toets bestaat uit **drie** (3) opgaven!

Succes!

1.) Zij $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= F_1(x, y, z)\ \mathbf{i}\ +\ F_2(x, y, z)\ \mathbf{j}\ +\ F_3(x, y, z)\ \mathbf{k} \\ &= \ln(xy - 1)\ \mathbf{i}\ +\ \sqrt{1 - z^2}\ \mathbf{j}\ +\ (x^2 + y^2 + z^2)\ \mathbf{k} \\ &= (\ln(xy - 1),\ \sqrt{1 - z^2},\ x^2 + y^2 + z^2)^T\end{aligned}$$

en $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door

$$f(x, y, z) := F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z).$$

(a) Bepaal het domein van F.

(b) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{F}(x, y, z)$.

(c) Bepaal div $\mathbf{F}$, curl $\mathbf{F}$ en grad f.

(d) Bereken de lineaire benadering van f rond het punt $(2, 1, 0)$.

(e) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $(2, 1, 0)$ in de richting gegeven door de vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0)^T$.

Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(s, t) &= t\ \mathbf{i}\ +\ s^2\ \mathbf{j}\ +\ st\ \mathbf{k} \\ &= (t,\ s^2,\ st)^T\end{aligned}$$

en $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $H(s, t) = F(G(s, t))$.

(f) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{H}(s, t)$ met behulp van de kettingregel voor functies van meerdere variabelen.

2.) Laat $\mathcal{C}$ de doorsnijdingskromme zijn van de oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijkingen $x + 2y^2 = 1$ en $z^2 - 2x = 2$.

(a) Geef een parametrisatie $\mathbf{r}(t)$ van de kromme $\mathcal{C}$. Bepaal ook het bijbehorende parameterdomein.

(b) Bepaal de snelheid $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ en de grootte (i.e. lengte) van deze snelheid.

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Laat $\mathcal{C}_1$ de kromme zijn gegeven door de parametrisatie

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= e^t\ \mathbf{i}\ +\ t\ \mathbf{j}\ +\ t^2\ \mathbf{k} \\ &= (e^t,\ t,\ t^2)^T \end{aligned}$$

waarbij $0 \le t \le 1$. Zij $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door $g(x,y,z) = x^2 + 4y$.

(a) Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}_1} g ds$.

Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x,y,z) &= y\ \mathbf{i}\ -\ \sin(\pi y)\ \mathbf{j}\ +\ y(2y+5z)\ \mathbf{k} \\ &= (y,\ \sin(\pi y),\ y(2y+5z))^T \end{aligned}$$

(b) Bepaal de lijnintegraal van de tangentiële component van $\mathbf{G}$ langs de kromme $\mathcal{C}_1$:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r}.$$