Volledige Tentamen Analyse 2

Maandag 4 juni 2007, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en je studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **drie** opgaven.

Succes!

1.) Laat $\mathcal{C}$ het deel van de snijlijn zijn van de oppervlakken in $\mathbf{R}^3$ gegeven door de vergelijkingen $z^2 = 2xy$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dat ligt in het eerste octant, i.e. $x, y, z \geq 0$.

(a) Geef een gladde parametrisatie $\mathbf{r}$ van $\mathcal{C}$ en bereken de snelheid $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ en de grootte $|\mathbf{r}'|$ van deze parametrisatie.

(b) Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}} xyz\, ds$.

2.) We beschouwen het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbf{R}^3$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) := yz\,\mathbf{i} \ + \ z^2\,\mathbf{k} \ = (\ yz,\ 0,\ z^2).$$

Laat

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geq 0,\ x + y + z \geq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

De rand van D, ∂D, bestaat uit vijf delen, waaronder:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &:= \{(x, y, z) \in D \mid x + y + z = 1\},\\ \mathcal{S} &:= \{(x, y, z) \in D \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.\end{aligned}$$

∂D is georiënteerd volgens standaardoriëntatie: het eenheidsnormaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ wijst op ∂D het gebied D uit.

(a) Bereken $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

(b) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{T}$:

$$\int_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS \ = \ \int_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \bullet\, d\mathbf{S}.$$

(c) Bereken de volumeintegraal $\int_D z\, dV$.

!! Vervolg op achterkant !!

2.) (*Vervolg*)
Laat ∂D_{yz} het deel van ∂D zijn dat ligt in het yz-vlak (i.e. waarvoor $x = 0$). Men kan laten zien, dat

$$\int_{\partial D_{yz}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \tfrac{1}{12}.$$

(d) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{S}$:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet\, d\mathbf{S}.$$

(e) Bereken

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet\, d\mathbf{S}.$$

3.) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = (2x - y)(4x^2 + y^2 - 4)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0\}, \\ \partial R &= \text{de rand van } R, \\ \bar{R} &= \partial R \cup R \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x, y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f vier kritieke punten op $\mathbf{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f één extremum heeft in R. Geef aan of dit extremum een maximum of minimum is. Licht uw antwoord toe.

(d) Bepaal de extrema van de functie f beperkt tot ∂R. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.

(e) Bepaal de extrema van f op $\overline{R}$ (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).