Tentamen Analyse 2

Donderdag 19 juni 2008, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel uw naam, studentnummer en studierichting, en de naam van uw docent (F. den Hollander, V. Rottschäfer).
- Geef niet alleen antwoorden, maar leg berekeningen ook uit.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan als hulpmiddel. Bedenk daarbij wel dat alleen exacte antwoorden goed worden gerekend en geen benaderingen. Een formuleblad is niet toegestaan.

Succes!

1.) Zij C de kromme gegeven door dat deel van de doorsnede van de twee oppervlakken $x^2 + y^2 + 4z^2 = 5$ en $x = 1$ waarvoor geldt dat $y \leq 2z$. Geef C een oriëntatie lopend van het punt $(1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ naar het punt $(1, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$. Laat $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \sin(y)\,\mathbf{i} \;+\; 2xz\,\mathbf{j} \;+\; yz\,\mathbf{k} = (e^z \sin(y),\ 2xz,\ yz).$$

(a) Geef een parametrisatie van C en bereken daarmee de lijnintegraal

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Zij S het oppervlak dat boven $y = 2z$, binnen $x^2 + y^2 + 4z^2 = 5$ en op $x = 1$ ligt, met een oriëntatie gegeven door het normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ met negatieve x-component.

(b) Schets S, geef de oriëntatie op S, en geef de oriëntatie op de rand van S geïnduceerd door de oriëntatie van S.

(c) Bereken curl $\mathbf{F}$.

(d) Bereken de fluxintegraal

$$\int_S \text{curl } \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\; dS.$$

!! Vervolg op achterkant !!

2.) Zij $D \subset \mathbf{R}^3$ het gebied dat boven $z = x^2 + 8y^2$ en onder $z = 9 - y^2$ ligt.

(a) Bereken het volume van D.

Zij $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\colon z = x^2 + 8y^2,\ z \leq 9 - y^2\}$, met een normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ dat naar binnen gericht is (d.w.z. wijzend naar D).

(b) Bepaal de flux door S van het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\tfrac{3}{2}x^2\ \mathbf{i}\ +\ y(x-2)\ \mathbf{j}\ +\ 2xz\ \mathbf{k} = (-\tfrac{3}{2}x^2,\ y(x-2),\ 2xz),$$

d.w.z. bereken

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\ dS.$$

3.) Zij $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = x(x^2 + 3y^2 - 9)$, en zij

$$\begin{aligned} D &= \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x^2 + y^2 < 4 \,\}, \\ \overline{D} &= \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x^2 + y^2 \leq 4 \,\}, \\ \partial D &= \overline{D} \setminus D. \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaukromme $f(x, y) = 0$ en geef aan waar f positief, respectievelijk, negatief is. Schets D, $\overline{D}$ en ∂D in dezelfde figuur.

(b) Laat zien dat f vier kritieke punten op $\mathbf{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f twee extrema heeft in D. Geef voor elk van deze extrema aan of dit een maximum dan wel een minimum is. Licht het antwoord toe.

(d) Bepaal de extrema van f beperkt tot ∂D. Geef daarbij de plaats, de aard en de grootte van deze extrema.

(e) Doe hetzelfde voor de extrema van f beperkt tot $\overline{D}$.