Analyse 2

Toets dinsdag 10 maart 2009, 9.00-11.00 uur

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.
Motiveer elk antwoord dat je geeft met een (korte) berekening of redenering.

---

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ieder punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (3 pt)

b) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(-1,1)$. (5 pt)

c) Ga na of de partiële afgeleiden van f in het punt $(0,0)$ bestaan en bepaal zo mogelijk deze partiële afgeleiden. (5 pt)

d) Ga na of f differentieerbaar is in $(0,0)$. (4 pt)

2. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een willekeurige differentieerbare functie zijn en definieer g door $g(x,y) = f(x^2 - y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Toon aan dat g voldoet aan

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{voor alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (5 \text{ pt})$$

Zie ommezijde voor de rest van de opgaven

3. De temperatuur in een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$T(x, y) = xy.$$

a) Teken de hoogtelijnen (de "isothermen") voor $T = -2, -1, 0, 1, 2$. (4 pt)

b) In welke richting vanuit het punt $(1, -2)$ daalt de temperatuur het snelst? (4 pt)

Een deeltje Q beweegt zich met een snelheid $v = 3$ vanuit het punt $(1, -2)$ in de richting $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Bereken de snelheid van verandering van temperatuur voor het deeltje Q op het tijdstip dat Q zich in het punt $(1, -2)$ bevindt. (5 pt)

4. De (gesloten) kromme C is de snijkromme van de elliptische cilinder $x^2 + 2y^2 = 9$ met het vlak $y + z = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Het punt $(-1, 2, -2)$ ligt op C.

a) Bepaal de richting van de raaklijn aan de kromme C in het punt $(-1, 2, -2)$. (6 pt)

b) Bereken de lengte van de kromme C.
(Hint: een parametrisering met $x(t) = 3\cos t$ is handig.) (4 pt)

5. Bekijk het vectorveld F op $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ gegeven door

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} xy^3 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een vergelijking voor de veldlijn door het punt $(2, 1)$. (5 pt)

Succes !