Tentamen Analyse 2

Donderdag 18 juni 2009, 10.00-13.00 uur

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Motiveer elk antwoord dat je geeft met een (korte) berekening of redenering.

---

1. D is het gebied $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 4x;\ 1 \le xy \le 4\}$.

a) Bereken de oppervlakte van D m.b.v. een geschikte coördinatentransformatie. (8 pt)

De rand ∂D van D bestaat uit vier gladde krommen. Laat de oriëntatie van ∂D met de klok mee lopen. Verder is $\mathbf{F}$ het vectorveld $y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

b) Bereken $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ rechtstreeks. (9 pt)

c) Bereken $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ m.b.v. een oppervlakte-integraal. (4 pt)

2. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)(x + y).$$

a) Teken in het (x, y)-vlak de niveaulijnen bij $f(x, y) = 0$ en geef tevens de vlakdelen aan waar $f(x, y)$ positief, dan wel negatief is. (4 pt)

b) Bepaal de kritieke (= stationaire) punten van f en ga na of het maxima, minima dan wel zadelpunten zijn. (10 pt)

Laat G het gebied

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4,\ xy \le 4\}$$

zijn.

c) Bepaal de extreme waarden van f op de rand ∂G van G. (12 pt)

d) Bepaal het globale minimum en maximum van f op G. (2 pt)

De laatste opgave staat op de achterzijde.

3. De verzameling V in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + z^2, \ -1 \leq z \leq 1\}.$$

Laat S_1 het deel van de rand van V zijn dat in het vlak $z = 1$ ligt, S_2 het deel van de rand in het vlak $z = -1$ en laat

$$S_3 = \{(x, y, z) \colon \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z^2, \ -1 \leq z \leq 1\}.$$

De oppervlakken S_1, S_2 en S_3 zijn georiënteerd volgens de normaalvector $\hat{\mathbf{N}}$ met lengte 1 die vanuit V naar buiten wijst. Verder is het vectorveld $\mathbf{F}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \Big(zx + \big(x^2 + y^2 - (1 + z^2)^2\big)e^y\Big)\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + (z^2 + 1)\mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bepaal de divergentie van $\mathbf{F}$. (2 pt)

b) Bestaat er een differentieerbare functie $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met continue partiële afgeleiden zo dat $\mathbf{F} = \operatorname{grad} g$? Beargumenteer je antwoord. (3 pt)

c) Geef een schets van V. (4 pt)

d) Bepaal de inhoud van V. (5 pt)

e) Bepaal de flux van $\mathbf{F}$ door S_1 en de flux van $\mathbf{F}$ door S_2:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \quad \text{en} \quad \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS. \quad (5 \text{ pt})$$

f) Bepaal de flux van $\mathbf{F}$ door S_3:

$$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS. \quad (8 \text{ pt})$$

g) Bepaal

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV. \quad (3 \text{ pt})$$

***** Einde tentamen *****