Tentamen Analyse 2

Maandag 17 augustus 2009, 10.00-13.00 uur

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Motiveer elk antwoord dat je geeft met een (korte) berekening of redenering.

---

1. Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Laat $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ met $\|\mathbf{v}\| = 1$ zijn. Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(0,0)$ in de richting $\mathbf{v}$. (5 pt)

b) Is f differentieerbaar in $(0,0)$? Beargumenteer het antwoord. (7 pt)

2. Laat het gebied D in $\mathbb{R}^2$ gegeven zijn door

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 < 4,\ y > 0\},$$

en laat

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$$

zijn. Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + (x-y)^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bepaal de kritieke (=stationaire) punten van f in D en bepaal of deze minima, maxima of zadelpunten zijn. (10 pt)

b) Bepaal het globale minimum en maximum van f op de rand ∂D van D. (10 pt)

c) Bepaal het globale minimum en maximum van f op $\overline{D}$. (2 pt)

De laatste opgave staat op de achterzijde van dit blad.

3. Laat het gebied V in $\mathbb{R}^3$ gegeven zijn door

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, z^2 - x^2 - y^2 \geq 1; \, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Verder is S het oppervlak

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, z^2 - x^2 - y^2 = 1; \, 1 \leq z \leq 2\}$$

en wordt het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven door

$$\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

a) Teken het gebied V en het oppervlak S. (4 pt)

b) Bereken het volume van V. (6 pt)

De flux van het vectorveld $\mathbf{F}$ door S is de integraal

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \mathrm{d}S$$

waarbij $\hat{\mathbf{N}}$ de eenheidsnormaal op S is met negatieve z-component.

c) Geef twee manieren aan waarop de flux van $\mathbf{F}$ door S kan worden berekend en voer de berekening volgens beide methoden uit. (16 pt)

d) C is de snijkromme van de rand van V met het vlak $x - y = 0$. Bereken

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Oriënteer C naar keuze. (9 pt)

***** Einde tentamen *****