Tentamen Analyse 2 (wis)

Donderdag 10 juni 2010, 14:00-17:00 uur

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Motiveer elk antwoord dat je geeft met een (korte) berekening of redenering.

---

1. Bekijk de deelverzameling D van $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$D = \{(2u - v, (u + 2v)^2) \colon \; -1 \leq u \leq 2, \; 1 \leq v \leq 2\}$$

en het vectorveld $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Laat C de rand zijn van D, geöriënteerd *met de klok mee.*

a) Bepaal de oppervlakte van D. *(6 pt)*

b) Bepaal $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$. *(3 pt)*

2. Laat de functie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x, y) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + (x - 2y)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bepaal de stationaire punten (= critical points) van f op $\mathbb{R}^2$ en bepaal of f daar een lokaal minimum, lokaal maximum of zadelpunt heeft. *(6 pt)*

b) Bekijk de verzameling

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + 2y \leq 4\}.$$

Bepaal de maxima en minima van f op D en bepaal ook of deze lokaal of globaal zijn. *(7 pt)*

De laatste opgave staat op de achterzijde.

3. Gegeven zijn de verzamelingen

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq (4 - z^2)^2, \ -1 \leq z \leq 2\}$$

en

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = (4 - z^2)^2, \ -1 \leq z \leq 2\}.$$

a) Geef een schets van V. *(3 pt)*

b) Bepaal de inhoud van V. *(5 pt)*

c) Bepaal $\iiint_V \mathbf{div}\, F \, dV$, waar F is gegeven door

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{(4-z^2)^2 - x^2 - y^2}{e^{(x^2+y^2)^2}} \\ \\ y(x^2 + y^2 - (4 - z^2)^2) \\ \\ 4 - z^2 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad \textit{(10 pt)}$$

d) S snijdt het vlak $y + 2z = 4$ in een kromme C. Geef een parametrisering van C en bepaal

$$\int_C G \cdot d\mathbf{r},$$

waar

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Gebruik een oriëntatie van C naar keuze. *(5 pt)*

e) Bepaal de maximale afstand van een punt in de doorsnede van S met het vlak $y = 3$ tot het punt $(0, 0, 2)$. *(5 pt)*

***** Einde tentamen *****