Tentamen Analyse 2 (wis)

Maandag 9 augustus 2010, 10.00-13.00 uur

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Motiveer elk antwoord dat je geeft met een (korte) berekening of redenering.

---

1. Gegeven zijn de verzameling

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 2x^2 + y^2 < 10\}$$

en de functie $f\colon A \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = \sqrt{10 - 2x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in A.$$

a. Bepaal een normaalvector met lengte 1 op de grafiek van f in het punt $(-1, 2, 2)$. *(3 pt)*

b. Laat $(a, b) \in A$. Bepaal de richting waarin f vanuit (a, b) het snelste *daalt*. *(2 pt)*

2. Bekijk de functie $h\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$h(x, y) = \begin{cases} x \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

en de verzamelingen

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 < 4,\ x + y > 0\}, \\ \overline{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y \geq 0\}. \end{aligned}$$

a. Toon aan dat h continu is in $(0, 0)$. *(3 pt)*

b. Is h differentieerbaar in $(0, 0)$? Beargumenteer! *(3 pt)*

c. Bepaal de stationaire (=kritieke) punten van h op D en ga na of het minima, maxima of zadelpunten zijn. *(6 pt)*

d. Beredeneer dat h op $\overline{D}$ een globaal minimum en maximum heeft. *(1 pt)*

e. Bepaal de minima en maxima van h op $\overline{D}$ en geef aan of deze lokaal of globaal zijn. *(5 pt)*

*** **Z.O.Z.** ***

3. S is het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2e^{-(x^2+y^2)},\ 1 \leq z \leq 2\}.$$

V is het gebied dat wordt ingesloten door het oppervlak S en het vlak $z = 1$. S wordt zo georiënteerd dat de normaalvector $\mathbf{N}$ buiten V wijst. Verder is $U\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gegeven door

$$U(x, y, z) = \begin{pmatrix} -yz^2 \\ xz^2 \\ 4z^2 \end{pmatrix}.$$

a. Teken het gebied V. *(2 pt)*

b. Bereken de divergentie $\operatorname{div} U$ en rotatie $\operatorname{curl} U$ van U. *(3 pt)*

c. Bereken de inhoud van V. *(5 pt)*

d. Bereken $\displaystyle\iint_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} d\mathbf{S}$. *(7 pt)*

4. Bekijk in $\mathbb{R}^3$ het oppervlak T gegeven door de vergelijking

$$x^2 = y + 1$$

en de bol B gegeven door de vergelijking

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$$

a. Bepaal met behulp van Lagrange multiplicatoren welke punten op T minimale afstand tot het punt $(0, 1, 0)$ hebben en bepaal ook de minimale afstand. *(5 pt)*

Het oppervlak T en de bol B snijden elkaar in een kromme. Laat C het deel van deze kromme zijn dat ligt in $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

b. Geef een parametrisering van C en bereken $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, waar

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ x - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

met een oriëntering van C naar keuze. *(5 pt)*

*** **EINDE** ***