

Toets Analyse 2

Dinsdag 8 maart 2010, 9:00-11:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
-

1. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S} = \{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 5.$$

- Geef een schets van het oppervlak \mathcal{S} aan de hand van minstens 3 niveaукrommen.
- Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan \mathcal{S} door het punt $(2, 1, 3)$.
- Bepaal een expliciete uitdrukking van de verzameling $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ van alle punten $(a, b, c) \in \mathcal{S}$ waarvan het raakvlak door (a, b, c) aan \mathcal{S} door het punt $(0, 3, 0)$ gaat.

2. Definieer voor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ en $d > 0$,

$$g(|\vec{x}|) = \frac{1}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^d}. \quad (1)$$

Ter herinnering is gegeven dat een functie $u : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch is (op het gebied D) als geldt dat $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

- Neem $n = 3$ en $d = 1$: laat zien dat $g(\vec{x})$ harmonisch is op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
- Neem nu $n > 3$. Bepaal $d = d(n)$ zodanig dat $g(\vec{x})$ harmonisch is op $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
- Neem $n = 2$. Bepaal een functie $\tilde{g}(|\vec{x}|)$ – niet noodzakelijk van de vorm (1) – die harmonisch is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3. Beschouw de afbeelding $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2).$$

- Bepaal in het punt $(1, 1, 1)$ de richtingsafgeleide van $H(x, y, z)$ in de richting van $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Beschouw een deeltje dat zich beweegt door het vlak $V = \{x + 2y + 3z = 6\}$ en dat zich bevindt in het punt $(1, 1, 1) \in V$. Bepaal de richting waarin het deeltje kan bewegen zodanig dat de waarde van H gelijk blijft aan $H(1, 1, 1) = \frac{3}{2}$. (Onthou hierbij dat het deeltje het vlak V niet kan verlaten.)
- Bepaal de richting waarin het deeltje moet bewegen om H zo sterk mogelijk te laten toenemen.

4. Beschouw de kromme $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door parametrisatie

$$x(t) = -t^2 \sin t, \quad y(t) = t^2 \cos t, \quad z(t) = \frac{1}{16}t^4 \quad \text{voor } t \geq 0.$$

- Geef een schets van de kromme $\mathcal{K}_2 = \{(x(t), y(t))\}$ in het (x, y) -vlak.
- Bepaal een oppervlak $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ zodanig dat $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ (beschouw hiertoe $x(t)^2 + y(t)^2$).
- Bepaal de lengte van het gedeelte van \mathcal{K} tussen de punten $(0, 0, 0)$ ($t = 0$) en $(0, 4\pi^2, \pi^4)$ ($t = 2\pi$).