

Tentamen Analyse 2

Donderdag 9 juni, 14:00 - 17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
-

1. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S}_1 = \{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = [2(x^2 + y^2)]^{\frac{1}{4}}. \quad (1)$$

- Gegeven is dat $f(x, y)$ continu is in het punt $(0, 0)$. Is $f(x, y)$ ook differentieerbaar in $(0, 0)$? Leg uit.
 - Geef een schets van het oppervlak \mathcal{S}_1 .
 - Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan \mathcal{S}_1 door het punt $(1, 1, \sqrt{2})$.
2. Het oppervlak $\mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door $\mathcal{S}_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Het gebied $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ligt ingesloten tussen \mathcal{S}_1 (zie som 1) en \mathcal{S}_2 op zo'n manier dat \mathcal{D} onder \mathcal{S}_1 ligt (i.e. voor $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ geldt dat $z \leq f(x, y)$ (1)). De rand $\partial\mathcal{D}$ van \mathcal{D} bestaat uit twee gedeelten, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{S}_1$ en $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{S}_2$; \mathcal{S}_1 en \mathcal{S}_2 snijden elkaar in de kromme \mathcal{C} .
- Bepaal \mathcal{C} en geef een parametrisatie van \mathcal{C} , met oriëntatie tegen de klok in, gezien vanaf een punt op de z -as boven \mathcal{S}_2 .
 - Geef een schets van \mathcal{D} .
 - Bepaal het volume $\text{Vol}(\mathcal{D})$ van \mathcal{D} .
3. Definieer het vectorveld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ door middel van

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- Bepaal $\text{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ en $\text{curl}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.
 - Zij \vec{N} de naarbuiten wijzende normaal op \mathcal{D} (zie som 2). Bepaal $\iint_{\mathcal{B}_2} \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ (met \mathcal{B}_2 zoals gedefinieerd in som 2).
 - Bepaal $\iint_{\mathcal{B}_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS$.
4. (a) Bepaal $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ op basis van een parametrisatie van de kromme \mathcal{C} (zie som 2a) – met \vec{F} zoals gedefinieerd in som 3 (2) en de oriëntatie van \mathcal{C} zoals beschreven in onderdeel 2a.
- (b) De kromme \mathcal{C} is natuurlijk ook te zien als de rand van het oppervlak \mathcal{B}_2 . Bepaal nogmaals $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, nu gebruikmakend van de Stelling van Stokes.
5. Beschouw het punt $P = (0, 0, -1) \in \mathcal{D}$ (met wederom \mathcal{D} zoals gedefinieerd in som 2) en definieer de functie $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z + 1)^2$: $d(x, y, z)$ is het kwadraat van de afstand tussen P en een punt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Leg uit dat $d(x, y, z)$ voor $(x, y, z) \in \partial\mathcal{D} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ zowel een minimale als een maximale waarde moet aannemen.
 - Gebruik de multiplicatoren van Lagrange methode om de minimale afstand tussen P en $\partial\mathcal{D}$ te bepalen. Voor welke $(x_m, y_m, z_m) \in \partial\mathcal{D}$ neemt $d(x, y, z)$ deze minimale waarde aan?
 - Bepaal de maximale afstand tussen P en $\partial\mathcal{D}$. Voor welke $(x_M, y_M, z_M) \in \partial\mathcal{D}$ neemt $d(x, y, z)$ z'n maximale waarde aan?