Tentamen Analyse 2

Maandag 8 augustus, 10:00 - 13:00 uur.

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

---

1. Beschouw het oppervlak $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, dat is ingesloten door de krommes $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ gegeven door $\mathcal{C}_1 = \{-1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ en $\mathcal{C}_2 = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, en het vectorveld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2y + 1 \\ xy^2 + e^{y^2} \cos y \end{pmatrix}.$$

De rand $\partial\mathcal{R} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ is positief georiënteerd – ofwel: tegen de wijzers van de klok in – en legt zo ook de oriëntaties van $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ vast.

(a) Schets $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ en $\mathcal{R}$.

(b) Bepaal de lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(c) Bepaal $\oint_{\partial\mathcal{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ met behulp van de Stelling van Green.

(d) Bepaal $\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

2. Het volume $\mathcal{V}_1 \subset \mathbb{R}^3$ wordt verkregen door 'een plakje' van de bol $\mathcal{B} = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ 'af te snijden' langs het vlak $\{x = \sqrt{3}\}$, ofwel $\mathcal{V}_1 = \mathcal{B} \cap \{x \leq \sqrt{3}\}$.

(a) Schets $\mathcal{V}_1$.

(b) Bepaal het volume $\mathrm{Vol}(\mathcal{V}_1)$ van $\mathcal{V}_1$.

(c) Het volume $\mathcal{V}_2$ ontstaat uit $\mathcal{V}_1$ door 'nog een plakje af te snijden', nu langs $\{z = \sqrt{3}\}$: $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \{z \leq \sqrt{3}\}$ $(= \mathcal{B} \cap \{x \leq \sqrt{3}\} \cap \{z \leq \sqrt{3}\})$. Bepaal het volume van $\mathcal{V}_2$.

3. Van het (gladde) vectorveld $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven dat het alleen van z afhangt, $\vec{G}(x,y,z) = (g_1(z), g_2(z), g_3(z))^T$. Het volume $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$ is een eindig stuk van een cylinder, het wordt vastgelegd als het binnengebied omsloten door de rand $\partial\mathcal{W}$ bestaande uit 3 oppervlakken: $\partial\mathcal{W} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{L}_+ \cup \mathcal{L}_-$ met $\mathcal{Y} = \{x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$, $\mathcal{L}_\pm = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = \pm 1\}$.

(a) Laat <u>gebruikmakend van de divergentiestelling</u> zien dat $\iint_{\mathcal{Y}} \vec{G} \cdot \vec{N} dS = 0$ (waarbij $\vec{N}$ de naarbuiten wijzende normaal op $\mathcal{E}$ is).

(b) Laat ook aan de hand van een directe berekening zien dat $\iint_{\mathcal{Y}} \vec{G} \cdot \vec{N} dS = 0$.

(c) Stel dat $\vec{G}(z)$ vervangen wordt door $\vec{H}(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, een (glad) vectorveld dat alleen van x afhangt. Geldt nu ook dat $\iint_{\mathcal{Y}} \vec{H} \cdot \vec{N} dS = 0$? Leg uit.

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = x + y^2 - x^3$.

(a) Bepaal de kritieke punten van $f(x,y)$ op $\mathbb{R}^2$ en klassificeer deze. Bepaal de locale extrema van $f(x,y)$ (gedefinieerd op $\mathbb{R}^2$). Neemt $f(x,y)$ een absoluut minimum of maximum aan op $\mathbb{R}^2$?

Beschouw vervolgens $f(x,y)$ op een begrensd gebied, de circelschijf $\mathcal{D}_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ – waarbij $R > 0$ een parameter is (i.e. nog vrij gekozen kan worden).

(b) Neem $R = \frac{2}{3}$: bepaal het absolute minimum en het absolute maximum van $f(x,y)$ op $\mathcal{D}_{\frac{2}{3}}$; bepaal tevens alle locale minima en maxima van $f(x,y)$ op $\mathcal{D}_{\frac{2}{3}}$ die geen globaal extreem zijn.

(c) Neem $R > 1$, ofwel: kies R vast op een waarde groter dan 1: bepaal <u>alle</u> locale minima en maxima van $f(x,y)$ op $\mathcal{D}_R$ (dus inclusief de globale extrema).