Toets Analyse 2

Maandag 26 maart 2012, 14:00-16:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

---

1. Beschouw voor $\alpha \in \mathbb{R}$ het oppervlak $\mathcal{S}_\alpha = \{z = f_\alpha(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_\alpha(x,y) = 1 - (x^2 + 4y^2)^\alpha.$$

(a) Neem eerst $\alpha = 1$. Geef een schets van het oppervlak $\mathcal{S}_1$ aan de hand van minstens 3 niveaukrommen.

(b) Neem nog steeds $\alpha = 1$. Geef de vergelijking van het raakvlak aan $\mathcal{S}_1$ door het punt $(1, 0, 0)$.

(c) Neem nu $\alpha = -1$ en geef een schets van het oppervlak $\mathcal{S}_{-1}$.

(d) Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ is f_α een continue functie? En voor welke α is f_α differentieerbaar?

2. Beschouw het oppervlak $\mathcal{H} = \{z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}$ en laat $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{R}^3$, gegeven door de parametrisatie

$$x_1(t) = t\cos t, \quad y_1(t) = t\sin t, \quad z_1(t) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\, t^{\frac{3}{2}},$$

de baan van een deeltje M_1 beschrijven voor $t \in [0, 4\pi]$.

(a) Geef een schets van het oppervlak $\mathcal{H}$.

(b) Laat zien dat $\mathcal{C}_1$ op $\mathcal{H}$ ligt en schets $\mathcal{C}_1$ op $\mathcal{H}$. Bepaal de richting $\vec{v}_1(0)$ waarin M_1 vanuit $(0,0,0) \in \mathcal{H}$ op $t = 0$ vertrekt en geef deze aan in de schets.

(c) Bepaal de absolute snelheid $\|\vec{v}_1(t)\|$ van M_1 en de booglengte van $\mathcal{C}_1$.

(d) Laat M_2 een deeltje zijn dat identiek is aan M_1 en met exact dezelfde (absolute) snelheid als M_1 over $\mathcal{H}$ 'spiraliseert', ofwel: $\|\vec{v}_2(t)\| = \|\vec{v}_1(t)\|$ voor alle $t \in [0, 4\pi]$. Echter, M_2 vertrekt in een andere richting vanuit het startpunt $(0,0,0) \in \mathcal{H}$:

$$\vec{v}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}_1(0) \quad \text{(zie(b))}.$$

Geef <u>twee</u> mogelijke parametrisaties voor <u>twee</u> mogelijke banen $\mathcal{C}_2^+ \subset \mathcal{H}$ en $\mathcal{C}_2^- \subset \mathcal{H}$ van M_2. Schets beide banen op $\mathcal{H}$.

3. Beschouw de driehoek $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$ en $(1,0)$ en laat de stuksgewijs gladde kromme $\mathcal{K}$ de rand van $\mathcal{T}$ zijn, met oriëntatie tegen de wijzers van de klok in.

(a) Bepaal $\iint_{\mathcal{T}} x^2 e^{y^2}\, dA$.

(b) Zij $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$. Bepaal $\oint_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \oint_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(c) Zij $\vec{N}$ de (vanuit $\mathcal{T}$) naarbuiten wijzende normaalvector op $\mathcal{K}$. Bepaal $\oint_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds$ met $\vec{F}$ zoals gegeven in (b).

(d) Zij nu $\vec{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $\vec{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ met g_1, g_2 constant. Laat zien dat $\oint_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \vec{T}\, ds = \oint_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \vec{N}\, ds = 0$.

Opmerking. Het is de bedoeling dat deze (gehele) opgave wordt gemaakt <u>zonder</u> gebruik te maken van de Stelling van Green of van de divergentiestelling.