Tentamen Analyse 2

Maandag 6 augustus 2012, 14:00 - 17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven.

---

1. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f_1(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x,y) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}\left(1 - x^2 - y^2\right),$$

en de kromme $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{S}_1$ gegeven door

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x(t) = t\cos 3t,\ y(t) = t \sin 3t,\ z(t) = f_1(x(t), y(t));\ t \geq 0\}.$$

(a) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$ en $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$ voor $(x,y) \neq (0,0)$. Wat gebeurt er in $(0,0)$?

(b) Geef een schets van het oppervlak $\mathcal{S}_1$ aan de hand van een aantal niveaukrommen en als doorsnede met het vlak $\{y = 0\}$. Bepaal hiervoor de (lokale) minima en maxima van $f_1(x,y)$.

(c) De raaklijn aan $\mathcal{C}_1$ is wel gedefinieerd in $(0,0,0)$, ofwel: voor $t = 0$. Bepaal de raaklijn aan $\mathcal{C}_1$ in $(0,0,0)$.

(d) Bepaal lengte van $\mathcal{C}_1$ tussen de punten $(0,0,0)$ $(t=0)$ en $(\cos 3, \sin 3, 0)$ $(t = 1)$.

2. Beschouw het gebied $\mathcal{D}_2 \in \mathbb{R}^3$ dat onder het vlak $\{z = \sqrt{\frac{3}{2}}\}$ ligt en ingesloten is tussen de bollen $\mathcal{B}_{\text{in}}$ en $\mathcal{B}_{\text{out}}$, met

$$\mathcal{B}_{\text{in}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 2\},\ \mathcal{B}_{\text{out}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 3\};$$

ofwel

$$\mathcal{D}_2 = \left(\mathcal{B}_{\text{out}} \backslash \overline{\mathcal{B}_{\text{in}}}\right) \cap \{z < \sqrt{\frac{3}{2}}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 < x^2+y^2+z^2 < 3,\ z < \sqrt{\frac{3}{2}}\}.$$

De rand $\partial\mathcal{D}_2$ bestaat uit 3 stukken, $\mathcal{S}_{\text{in}} \subset \partial\mathcal{B}_{\text{in}}$, $\mathcal{S}_{\text{out}} \subset \partial\mathcal{B}_{\text{out}}$ en 'het deksel' $\mathcal{T}$ waarop $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(a) Geef een schets van $\mathcal{D}_2$ als doorsnede met het vlak $\{y = 0\}$ en geef een expliciete parameterisatie van het ringvormige deksel $\mathcal{T}$.

(b) Bepaal het volume van het gebied $\mathcal{D}_2$.

(c) Het vectorveld $\vec{F}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\vec{F}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ye^{z^2} + z\cos y^2 \\ -xe^{z^2} + y + z \sin x^2 \\ -x\cos y^2 - y \sin x^2 + z \end{pmatrix}.$$

Bepaal $\iint_{\mathcal{S}_{\text{out}}} \vec{F}_2 \cdot \vec{N} dS$ – met $\vec{N}$ de naarbuiten wijzende (eenheids)normaalvector – met behulp van een directe parameterisatie van $\mathcal{S}_{\text{out}}$.

(d) Bepaal $\iint_{\mathcal{T}} \vec{F}_2 \cdot \vec{N} dS$, met $\vec{N}$ nu de naarboven wijzende (eenheids)normaal op $\mathcal{T}$.

Z.O.Z.

3. Beschouw de 'staaf' $\mathcal{D}_3 \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathcal{D}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\},$$

en het begrensde oppervlak $\mathcal{S}_3 \subset \mathbb{R}^3 = \mathcal{D}_3 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$, ofwel: $\mathcal{S}_3$ is het deel van het oppervlak $\{z = xy\}$ binnen het volume $\mathcal{D}_3$,

$$\mathcal{S}_3 = \{(x,y,z) \in \mathcal{D}_3 : z = xy\} \subset \mathcal{D}_3.$$

De gesloten kromme $\mathcal{W}_3$ is gedefinieerd als de rand $\partial\mathcal{S}_3$ van $\mathcal{S}_3$.

(a) Bepaal het oppervlak van $\mathcal{S}_3$.

(b) Het begrensde oppervlak $\mathcal{P}_3$ is gedefinieerd als dat deel van de rand $\partial\mathcal{D}_3$ van $\mathcal{D}_3$ dat in ligt tussen de oppervlakken $\{z = xy\}$ en $\{z = -2\}$, ofwel:

$$\mathcal{P}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -2 \le z \le xy\};$$

$\mathcal{P}_3$ heeft twee gesloten krommen als rand: onderaan de cirkel $\mathcal{C}_3$ in het vlak $\{z = -2\}$ en bovenaan $\mathcal{W}_3$, de rand van $\mathcal{S}_3$; de oriëntaties van $\mathcal{P}_3$ en de randen $\mathcal{C}_3$ en $\mathcal{W}_3$ worden bepaald door de vanaf de z-as naarbuiten wijzende normaal op $\mathcal{P}_3$. Het vectorveld $\vec{F}_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\vec{F}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ e^{z^2} \end{pmatrix}.$$

Bepaal $\oint_{\mathcal{C}_3} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}$.

(c) Bepaal $\iint_{\mathcal{P}_3} \operatorname{curl} \vec{F}_3 \, dS = \iint_{\mathcal{P}_3} \vec{\nabla} \times \vec{F}_3 \, dS$.

(d) Bepaal $\oint_{\mathcal{W}_3} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}$.

4. Beschouw voor $\alpha > 0$ het oppervlak $\mathcal{S}_4(\alpha) \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathcal{S}_4(\alpha) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \alpha(x^2 + y^2)\}$$

en beschouw de functie $D(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$D(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2;$$

merk op dat $D(x,y,z)$ gelijk is aan het kwadraat van de afstand tussen (x,y,z) en $(0,0,1)$.

(a) Neem eerst $\alpha = \frac{3}{2}$ en bepaal de minimale waarde van $D(x,y,z)$ voor $(x,y,z) \in \mathcal{S}_4(\frac{3}{2})$. Voor welke $(x,y,z) \in \mathcal{S}_4(\frac{3}{2})$ wordt deze waarde aangenomen?

(b) Voor welke $\alpha > 0$ geldt dat de minimale waarde van D op $\mathcal{S}_4(\alpha)$ kleiner dan 1 is?

(c) Neem $\alpha = \frac{1}{2}$. Definieer de gesloten kromme $\mathcal{C}_4$ als de doorsnijding van $\mathcal{S}_4(\frac{1}{2})$ met $\mathcal{P}_4$, de rand $\partial\mathcal{D}_4$ van de ('liggende') cylinder $\mathcal{D}_4 \in \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathcal{D}_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 3\}, \text{ zodat } \mathcal{P}_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 3\}.$$

Bepaal het minimum en maximum van $D(x,y,z)$ op $\mathcal{C}_4 = \mathcal{S}_4(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{P}_4$.

(d) Neem nog steeds $\alpha = \frac{1}{2}$. Bepaal het minimum en maximum van $D(x,y,z)$ op het begrensde oppervlak $\mathcal{S}_5$ dat gedefinieerd is als dat deel van $\mathcal{S}_4(\frac{1}{2})$ dat in $\overline{\mathcal{D}_4}$ ligt – waarbij $\overline{\mathcal{D}_4} = \mathcal{D}_4 \cup \partial\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{P}_4$ de afsluiting van $\mathcal{D}_4$ is; ofwel: $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4(\frac{1}{2}) \cap \overline{\mathcal{D}_4}$. Heeft $D(x,y,z)$ ook nog andere lokale extremen op $\mathcal{S}_5$?