

# Tentamen Analyse 3

Donderdag 5 april 2007, 10-13 uur, zalen 174 en 412

- Vermeld uw naam, met voorletters, uw studienummer en uw studierichting op ieder blad.
- Ieder antwoord dient duidelijk gemotiveerd te zijn.

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven, zie ook de achterkant

Bij iedere opgave staat tussen haakjes het maximaal aantal te behalen punten.

$$\text{tentamencijfer} = \frac{\text{behaalde punten} + 5}{5}$$

**SUCCES!**

1. Gegeven is de rij  $\{a_n\}$  reële getallen met  $a_n > 0$  voor  $n \geq 1$ . Welke uitspraken zijn juist? Motiveer uw antwoorden.

- (a) (2 pnt) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  convergeert dan convergeert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- (b) (2 pnt) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergeert dan convergeert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ .
- (c) (2 pnt) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  convergeert dan convergeert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- (d) (2 pnt) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergeert dan convergeert  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ .

2. Laat de rij functies  $(f_n)$  op  $[0, \infty)$  gegeven zijn door

$$f_n(x) = \arctan(nx).$$

- (a) (2 pnt) Onderzoek voor welke  $x \geq 0$  de rij  $(f_n(x))$  convergeert.
- (b) (2 pnt) Zij  $\delta > 0$ . Bewijs dat de rij  $(f_n)$  uniform convergeert op  $[\delta, \infty)$ .
- (c) (2 pnt) Laat zijn dat de rij  $(f_n)$  niet uniform convergeert op  $[0, \infty)$ .
- (d) (2 pnt) Is de rij  $(f_n)$  uniform convergent op  $(0, \infty)$ ?
3. (4pnt) Laat zien dat de machtreeks rond 0 van  $\frac{x}{(1-x^2)^2}$  gegeven wordt door

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}.$$

Bepaal de convergentiestraal van de reeks.

4. (a) (3pnt) Schrijf  $(3 + 3i)^{13}$  in de vorm  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  met  $r \in \mathbb{R}$  en  $\theta$  tussen 0 en  $2\pi$ .
- (b) (2pnt) Teken in het complexe vlak de punten die voldoen aan:

$$|z - 2i| = \text{Im } z.$$

5. Wij beschouwen het stelsel

$$x' = \alpha x^2 + y, \quad y' = \alpha x - 4y, \quad (1)$$

waarbij  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (a) (2 pnt) Bepaal het rond de oorsprong gelineariseerde stelsel.
- (b) (2 pnt) Bepaal voor iedere  $\alpha$  of het gelineariseerde stelsel asymptotisch stabiel, neutraal stabiel of instabiel is.
- (c) (2 pnt) Bepaal voor iedere  $\alpha$  of het stelsel (1) in de oorsprong asymptotisch stabiel, neutraal stabiel of instabiel is.

6. (6pnt) Bereken de oplossing van

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Laat  $f(x) = 1 + x$ .

- (a) (4 pnt) Bereken de Fourierreeks van  $f$  op het interval  $[-\pi, \pi]$ .
- (b) (4 pnt) Op het gebied  $(0, \pi)$  kunnen wij  $f$  als cosinusreeks schrijven. Bereken de Fouriercoëfficiënten. Converteert de reeks uniform? Puntsgewijs? In de zin van de  $L^2$ ?