

Analyse 3

Hertentamen 27 maart 2008, 10–13 uur

Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan. Boeken, telefoon en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

1. Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z)^{4n}}{n^2} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} z^{2n}.$$

2. Laat de rijen functies (f_n) en (g_n) gegeven zijn door

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{en} \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2x^2}{\sqrt{k^4 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Is de rij (f_n) uniform convergent op $[-1, 1]$?
- (b) Is de rij (f_n) uniform convergent op $[0, \infty)$?
- (c) Is de rij (g_n) uniform convergent op $[-1, 1]$?

3. Los de onderstaande beginwaardeproblemen op en bepaal het maximale existentie-interval van de oplossing.

- (a) $(1 + t^2)^{1/2} y'(t) = t y^2(t) (1 + t^2)^{-1/2}$ met $y(0) = 1$.
- (b) $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{4t}$ met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 1$.

4. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'(t) + ay(t) = be^{-ct}$$

met constanten $a, c > 0$ en $b \in \mathbb{R}$.

Laat zien dat voor iedere oplossing $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Z.O.Z.

5. Laat $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Beschouw

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t), \quad t > 0. \quad (*)$$

(a) Schrijf (*) in de vorm

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + F(t),$$

met een geschikte 2×2 -matrix A en een geschikte functie F .

(b) Ga na dat A gelijkvormig is met een diagonaalmatrix J en dat

$$\|e^{tJ}\| \leq 2e^{-t} \quad \text{voor alle } t \geq 0.$$

(Hier $\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$.)

6. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x'(t) &= \ln(1 - z(t)) \\ y'(t) &= \ln(1 - x(t)) , \\ z'(t) &= \ln(1 - y(t)) \end{aligned} \quad t > 0.$$

(a) Laat zien dat dit stelsel één evenwicht heeft.

(b) Bepaal voor het evenwicht of het stabiel of instabiel is.

Opgave	1	2	3	4	5	6
Punten	2+2	2+2+2	3+3	3	2+3	2+4