Hertentamen Analyse 3

Donderdag 24 maart 2011, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

1.) Bekijk het beginwaardeprobleem

$$\sin t(t\sin t + \frac{dy}{dt}) = (t\sin t + \cos t)y; \quad x > 0,\ y(\frac{1}{2}\pi) = 0.$$

(a) Bepaal de oplossing van de homogene vergelijking.

(b) Bepaal nu de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking en bepaal daarmee de oplossing van het beginwaardeprobleem.

2.) Bekijk

$$2(x\frac{dy}{dx} + y)e^{2xy} = (2 - ae^{2xy})(1 + x),$$

waarbij a een parameter is.

(a) Bepaal voor welke a de vergelijking exact is.

Kies nu $a = 1$.

(b) Bepaal een integrerende factor waardoor de vergelijking exact wordt.

(c) Bepaal met behulp van (b) een (impliciete) uitdrukking voor de oplossing van de vergelijking waarvoor $y(-2) = 0$.

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Bekijk

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 13y = 0.$$

(a) Bepaal de oplossing van de vergelijking.

(b) Bepaal nu de algemene oplossing van de volgende inhomogene vergelijking

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 13y = 20te^{-t}.$$

(c) Bestaan er beginvoorwaarden $(y(0, y'(0))$ zodanig dat de oplossing begrensd blijft voor $t > 0$? Zo ja, geef de relatie(s) waaraan deze beginvoorwaarden moeten voldoen. Zo nee, geef argumentatie waarom niet.

4.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 2y^2 \\ \dot{y} &= y - xy. \end{aligned}$$

(a) Bepaal de vaste/equilibrium punten en karakteriseer deze. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel or instabiel is.

(b) Geef voor elk vast punt een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt.

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x, y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld.

(d) Geef in de schets bij (c) ook vaste punten met het fasevlak in de buurt van deze punten. Maak de schets compleet door een aantal banen te tekenen en schets alle mogelijke connecties tussen vaste punten. Schets voor deze connecties, x en y als functie van t (geef duidelijk aan bij welke baan in het fasevlak deze oplossingen behoren).