# Tentamen Analyse 3

Maandag 7 januari 2013, 10:00-13:00

---

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

**Succes!**

---

1.) Bekijk

$$(t^2+1)\frac{dg}{dt} = -\lambda t g,$$

waarbij $\lambda \in \mathbf{R}$ een parameter is.

(a) Bepaal de oplossing van de vergelijking.

Stel nu $\lambda = 2$ en bekijk het beginwaardeprobleem

$$(t^2+1)\frac{dg}{dt} = -4tg + t^2; \quad g(0) = 1.$$

b. Bepaal de algemene oplossing van deze inhomogene vergelijking en bepaal daarmee de oplossing van het beginwaardeprobleem.

2.) Bekijk

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = 0,$$

waarbij $\lambda \in \mathbf{R}$ een parameter is.

(a) Bepaal de oplossing van de vergelijking.

Stel nu $\lambda = 4$ en bekijk

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 4f = 3\sin(2x); \quad f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{4}.$$

b. Bepaal de oplossing van deze vergelijking.

---

**!! Vervolg op achterkant !!**

3.) Bepaal een oplossing van de volgende vergelijking voor $u(x,t)$

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (t^2+1)\frac{\partial u}{\partial t},$$

met randvoorwaardes

$$u(0,t) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0,$$

met behulp van scheiden van variabelen. Schrijf daartoe $u(x,t) = f(x)g(t)$.

(a) Bepaal de vergelijkingen waaraan $f$ en $g$ moeten voldoen.

(b) Los de vergelijkingen voor $f$ en $g$ op. Voor welke waarde(s) van $\lambda$ zijn er niet-triviale oplossingen van de $u$-vergelijking die aan de randvoorwaardes voldoen? Geef bij elk van deze waardes van $\lambda$ de bijbehorende oplossing.

(c) Bepaal nu de oplossing voor de $u$-vergelijking met beginvoorwaarde

$$u(x,0) = \sin(\frac{1}{2}\pi x) + 2\sin(\frac{3}{2}\pi x).$$

4.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - y^3 \\ \dot{y} &= -x - y^2. \end{aligned}$$

(a) Bepaal de vaste/equilibrium punten en karakteriseer deze. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.

(b) Geef voor elk vast punt een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt.

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het $(x,y)$-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het $(x,y)$-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld.

(d) Geef in de schets bij (c) ook vaste punten met het fasevlak in de buurt van deze punten. Maak de schets compleet door een aantal banen te tekenen en schets alle mogelijke, kwalitatief verschillende, connecties tussen vaste punten. Schets voor deze connecties, $x$ en $y$ als functie van $t$ (geef duidelijk aan bij welke baan in het fasevlak deze oplossingen behoren).

(e) Bewijs dat er minstens 1 periodieke oplossing bestaat. Hoeveel periodieke oplossingen bestaan er?