Tentamen Analyse 3

Maandag 6 januari 2014, 10:00 - 13:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

---

1. Gegeven is de inhomogene tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = g(t), \tag{1}$$

waarbij $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoende glad is.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem, ofwel: neem eerst $g(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\text{hom}}(t)$ van vergelijking (1) en bepaal de limiet $\lim_{t\to\infty} x_{\text{hom}}(t)$.

(b) Neem nu $g(t) = g_1(t) = 3 + e^{-2t}$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\text{inh},1}(t)$ van vergelijking (1) en bepaal de limiet $\lim_{t\to\infty} x_{\text{inh},1}(t)$.

(c) Beschouw nu vergelijking (1) voor algemene $g(t)$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\text{inh},g}(t)$ van (1).
Hint. Gebruik de 'variatie van constanten'-methode.

(d) Beschouw wederom het algemene geval (als in (c)) en neem aan dat $\lim_{t\to\infty} g(t)$ bestaat; definieer $g_\infty = \lim_{t\to\infty} g(t)$. Laat $x_{\text{inh},g}(t)$ zoals in (c) de algemene oplossing van (1) zijn. Laat zien dat $\lim_{t\to\infty} x_{\text{inh},g}(t)$ bestaat en bepaal deze limiet.

2. Beschouw voor $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$(t^2 - 4)\ddot{y} + 4t\dot{y} + \gamma y = 0. \tag{2}$$

(a) Neem $\gamma = 2$. Bepaal door middel van reeksontwikkelingen rond $t_0 = 0$ de twee onafhankelijke oplossingen $y_1(t; 2)$ en $y_2(t; 2)$ van vergelijking (2) waarvoor geldt dat $y_1(0; 2) = 1$, $\dot{y}_1(0; 2) = 0$ en $y_2(0; 2) = 0$, $\dot{y}_2(0; 2) = 1$.

(b) Neem wederom $\gamma = 2$. Bepaal vanuit de in (a) gevonden reeksontwikelingen de convergentiestralen R_1 en R_2 van de in (a) bepaalde oplossingen $y_1(t; 2)$ en $y_2(t; 2)$.

(c) Beschouw nu het algemene geval $\gamma \in \mathbb{R}$. Geef een (zo groot mogelijke) ondergrens van de convergentiestraal R_γ van de algemene oplossing $y(t; \gamma)$ van (2).

3. Beschouw voor $\sigma \in \mathbb{R}$ het 2-dimensionale stelsel,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3\sigma & 2\sigma \end{pmatrix} \vec{x}. \tag{3}$$

(a) Neem $\sigma = 1$. Bepaal de algemene oplossing $\vec{x}_{\sigma=1}(t)$ van (3). Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes, expliciet gebruikmakend van de bij dit probleem horende eigenvectoren.

(b) Neem $\sigma = -4$. Bepaal wederom de algemene oplossing $\vec{x}_{\sigma=-4}(t)$ van (3). Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes, expliciet gebruikmakend van de bij dit probleem horende eigenvectoren. Laat zien dat voor alle $\vec{x}_{\sigma=-4}(t)$, ofwel: onafhankelijk van de beginvoorwaarden, geldt dat $\vec{x}_{\sigma=-4}(t) \to (0,0)$ als $t \to \infty$. Geef in de schets van het faseportret duidelijk aan hoe een oplossing $\vec{x}_{\sigma=-4}(t)$ $(0,0)$ benadert als $t \to \infty$.

(c) Beschouw nu het algemene geval $\sigma \in \mathbb{R}$ en definieer $\vec{x}_\sigma(t;\vec{X}_0)$ als de oplossing van (3) waarvoor geldt dat $\vec{x}_\sigma(0;\vec{X}_0) = \vec{X}_0$; ofwel: $\vec{X}_0$ is de beginvoorwaarde van $\vec{x}_\sigma(t;\vec{X}_0)$. Voor welke $\sigma \in \mathbb{R}$ geldt, *onafhankelijk van de gekozen beginvoorwaarde* $\vec{X}_0$, dat de limiet van $\vec{x}_\sigma(t;\vec{X}_0)$ bestaat als $t \to \infty$?

4. Beschouw voor $\mu \in \mathbb{R}$ het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= (3-\mu)x + y - x(x^2+y^2), \\ \dot{y} &= -x + 3y - y(x^2+y^2). \end{cases} \tag{4}$$

Gegeven is dat dit stelsel op de volgende equivalente manier geschreven kan worden

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\mu\frac{x^2}{r} + r(3-r^2) = -\mu r\cos^2\theta + r(3-r^2), \\ \dot{\theta} &= \mu\frac{xy}{r^2} - 1 = \mu\sin\theta\cos\theta - 1, \end{cases} \tag{5}$$

waarbij (r,θ) vanzelfsprekend poolcoördinaten zijn (gerelateerd aan (x,y) via $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

(a) Neem $\mu = 0$. Laat zien dat systeem (4) een periodieke oplossing heeft en bepaal deze expliciet. Geef een duidelijke schets van het faseportret van systeem (4).

(b) Neem $\mu = 2$. Bepaal alle kritieke punten $(x_{*,j}, y_{*,j})$ van (4).
Hint/Opmerking: $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.

(c) Neem nog steeds $\mu = 2$. Zijn de in (b) gevonden kritieke punten $(x_{*,j}, y_{*,j})$ van (4) (asymptotisch) stabiel of instabiel als oplossingen van de bijbehorende gelineariseerde systemen? Wat kan je hieruit concluderen over de (asymptotische) stabiliteit/instabiliteit van de kritieke punten als oplossingen van (4)?

(d) Neem $-2 < \mu < 2$. Laat zien dat vergelijking (4) een periodieke oplossing heeft.