Tentamen Analyse 3

Donderdag 6 februari 2014, 14:00 - 17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

---

1. Beschouw voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de inhomogene eerste orde vergelijking,

$$t\dot{x} + (1 + \alpha t)x = \beta t. \tag{1}$$

Opmerking: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem, ofwel: neem eerst $\beta = 0$. Bepaal voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{R}$ de algemene oplossing $x_{\mathrm{h},\alpha}(t)$ van het homogene probleem.

(b) Neem nu $\alpha = \beta = 1$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\mathrm{i},1}(t)$ van de inhomogene vergelijking (1).

(c) Neem $\beta = 1$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ en laat $x_{\mathrm{i},\alpha}(t)$ de algemene oplossing zijn van (1). Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{i},\alpha}(t)$? Wat is deze limiet?

2. Beschouw voor $t > 0$ en $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$t^2\ddot{y} + (t - \gamma t^2)\dot{y} - \frac{1}{4}(1 + 2t\gamma)y = 0. \tag{2}$$

Merk op dat (2) de vorm van een Euler vergelijking heeft als $\gamma = 0$.

(a) Neem $\gamma = 0$. Bepaal de algemene oplossing $y_0(t)$ van (2).

(b) Neem wederom $\gamma = 0$ en laat $y_0^*(t)$ de oplossing van (2) zijn waarvoor geldt dat $y_0^*(1) = 1$ en $\dot{y}_0^*(1) = a^*$, met $a^* \in \mathbb{R}$ zodaning dat $\lim_{t\downarrow 0} y_0^*(t)$ bestaat. Bepaal a^*.

(c) Neem nu $\gamma = 1$. Bepaal door middel van reeksontwikkelingen de algemene oplossing $y_1(t)$ van vergelijking (2).

(d) Neem $\gamma = 1$ en laat wederom $y_1^*(t)$ de oplossing van (2) zijn waarvoor geldt dat $y_1^*(1) = 1$ en $\dot{y}_1^*(1) = b^*$, met $b^* \in \mathbb{R}$ zodaning dat $\lim_{t\downarrow 0} y_1^*(t)$ bestaat – zie ook onderdeel (b). Bepaal b^*.

Z.O.Z.

3. Beschouw voor $\sigma \in \mathbb{R}$ het 2-dimensionale stelsel,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & \sigma \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}. \tag{3}$$

(a) Neem $\sigma = -1$. Bepaal de algemene oplossing $\vec{x}_{-1}(t)$ van (3). Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes.

(b) Neem $\sigma = 4$. Bepaal wederom de algemene oplossing $\vec{x}_4(t)$ van (3). Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes, expliciet gebruikmakend van de bij dit probleem horende eigenvectoren.

(c) Neem nu $\sigma = 1$ en definieer $\vec{x}_1(t; A)$ als de oplossing van (3) waarvoor geldt dat $\vec{x}_1(0; A) = (A, 0)$ voor zekere $A \in \mathbb{R}$; ofwel: het punt $(A, 0)$ is de beginvoorwaarde van $\vec{x}_1(t; A)$. Bepaal $\lim_{t\to\infty} \vec{x}_1(t; A)$ voor elke $A \in \mathbb{R}$.

4. Beschouw voor het stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(4 - x^2 - y^2). \end{cases} \tag{4}$$

Definieer $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ als de oplossing van (4) met beginvoorwaarden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ofwel: $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0)$.

(a) Bepaal de kritieke punten van (4).

(b) Neem aan dat de beginvoorwaarden (x_0, y_0) in het gebied $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ liggen, waarbij $\mathcal{G}$ gegeven is door

$$\mathcal{G} = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0 \ \text{ en } \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Met andere woorden: neem aan dat $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0) \in \mathcal{G}$. Laat zien dat $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) \in \mathcal{G}$ voor alle $t \geq 0$.

(c) Toon aan dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (0, 2)$ voor alle oplossingen $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ van (4) met $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$.

(d) Bepaal $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ voor alle mogelijke keuzes van de beginvoorwaarden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Bewijs je beweringen.