Tentamen WI2608 Optimalisering (TUD) en Besliskunde 1 (UL) 17/01/2011

Er zijn zes opgaven in dit tentamen. Laat bij elk antwoord duidelijk zien hoe je eraan bent gekomen. De normering voor elke opgave staat na de laatste opgave. Het uiteindelijke cijfer krijg je door het totaal aantal punten door 10 te delen.

Het gebruik van een laptop is niet toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is wel toegestaan. Veel succes!

Opgave 1. Een personeelschef van een luchtvaartmaatschappij moet bepalen hoeveel nieuwe flight attendants aangenomen moeten worden voor de komende T maanden. De behoefte in maand t, $t = 1, \ldots, T$, uitgedrukt in flight attendant-vlieguren bedraagt u_t.

Een flight attendant die in dienst treedt, ondergaat eerst een opleiding van één maand voordat hij/zij als zelfstandige flight attendant op een vlucht kan optreden. Een onderdeel van de opleiding bestaat uit het meevliegen op enkele vluchten waarbij een flight attendant in opleiding begeleid wordt door een ervaren flight attendant. Dit kost de ervaren flight attendant 100 vlieguren per leerling per maand (zodat er 100 uren minder beschikbaar zijn voor de vluchten zelf).

Iedere ervaren flight attendant werkt 150 uur per maand en er zijn f_0 ervaren flight attendants beschikbaar aan het begin van de planningsperiode. Veronderstel dat $150 f_0 \geq u_1$. Als in een maand de urencapaciteit van het flight attendant-bestand groter is dan de behoefte wordt de werktijd per flight attendant verkort, maar er worden geen flight attendants ontslagen. Aan het eind van iedere maand neemt gemiddeld 10% van de ervaren flight attendants (exclusief de zojuist opgeleiden) uit eigen beweging ontslag. Een ervaren flight attendant verdient V Euro per maand, en een flight attendant in opleiding L Euro.

De vraag is hoeveel flight attendants de personeelschef aan het begin van iedere maand in opleiding moet nemen opdat iedere maand aan de behoefte wordt voldaan, terwijl de kosten voor de maatschappij zo klein mogelijk zijn. Formuleer dit kostenminimaliseringsprobleem als een lineair geheeltallig optimaliseringsprobleem.

Opgave 2.

2a) Formuleer het volgende LP-probleem in kanonieke vorm.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & z & = & & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & & & & \\
\text{odv} & & & & & 3x_2 & & & + & 3x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 2 \\
 & & & & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & & & + & x_6 & = & 2 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

2b) Uitgaand van de kanonieke vorm in opgave a), voer een iteratie uit van het Simplexalgoritme. Is de verkregen oplossing optimaal? Vergeet niet je antwoord te motiveren.

2c) Formuleer (LOS NIET OP!) het probleem om te bepalen of het volgende stelsel lineaire voorwaarden een toegalaten oplossing heeft als een LP-probleem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & 3 \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & & & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. & & \end{array}$$

2d) Hoe herkent het Simplexalgoritme dat een LP-probleem onbegrens is?

Opgave 3. Het probleem P

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max z = & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{odv} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq & 0 & \end{array}$$

is opgelost met de simplexmethode. Het verkregen tableau ziet er als volgt uit:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	s_3
s_1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{19}{4}$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$
x_2	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-z$	$-\frac{55}{4}$	$-\frac{35}{4}$	0	0	0	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{4}$

3a) Formuleer het bijbehorende duale probleem, en bepaal (mag rechtsreeks uit het tableau) de optimale duale oplossing.

3b) Voor welke waarden van de rechterzijdecoëfficient b_1 blijft de optimale basis dezelfde?

3c) Voor welke waarden van de doelfunctiecoëfficient c_2 blijft de huidige optimale oplossing optimaal?

3d) Bepaal een "Gomory cut" (Gomorysnede) van de tweede rij van het Simplextableau.

Opgave 4.

4a) Gegeven zijn een primaal probleem (D) in standaard vorm en het bijbehorende duale probleem (D):

$$\text{(P): } \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \text{ odv } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m, \ x \geq 0,$$

$$\text{(D): } \min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \text{ odv } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = 1, \ldots, n, \ y \geq 0,$$

Neem aan dat $\hat{x}$ een toegelaten oplossing is voor (P) en dat $\hat{y}$ een toegelaten oplossing is voor (D). Bewijs dat $\hat{x}$ en $\hat{y}$ optimale oplossingen zijn voor (P) en (D) respectievelijk, dan en slechts dan als

$$\hat{x}_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i - c_j) = 0, \ j = 1, \ldots n \quad \text{en} \quad \hat{y}_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j) = 0, \ i = 1, \ldots m\,.$$

NB! Je mag gebruik maken van de Sterke Dualiteitsstelling zonder die stelling apart te bewijzen.

4b) Beschouw het knapsackprobleem

$$z = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad \text{odv} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \ x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,.$$

Veronderstel dat:

$$\begin{array}{rcl} a_j & \leq & b, \ j = 1, \ldots, n \\ a_j & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ j = 1, \ldots, n \\ b & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \dfrac{c_1}{a_1} & \geq & \dfrac{c_j}{a_j}, \ j = 2, \ldots, n\,. \end{array}$$

De "greedyoplossing" voor dit probleem is $(x^G)^T = (\lfloor (b/a_1) \rfloor, 0, \ldots, 0)$ met waarde $z^G = c_1 \lfloor (b/a_1) \rfloor$. Laat zien dat $z^G \geq (1/2)z$.

Opgave 5. Geef op elk van de volgende vragen een kort antwoord. Vergeet niet ingevoerde notatie te definieren.

5a) De verzameling toegelaten oplossingen X_T van het *transportprobleem* wordt door de volgende voorwaarden gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= s_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= d_j \\ x_{ij} &\geq 0 \text{ voor iedere } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots n\,. \end{aligned}$$

Veronderstel dat $\sum_i s_i = \sum_j d_j$ en dat $s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i = 1, \ldots, m$, en $d_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ j = 1, \ldots, n$. Welke eigenschap van de voorwaardenmatrix garandeert dat elk extreempunt van X_T geheeltallig is?

5b) Definieer de complexiteitsklassen P, NP en NP-volledig.

5c) Gegeven zijn problemen Π_A en Π_B die beide tot de klasse NP behoren. Verder bestaat er een polynomiale-tijd transformatie van Π_A naar Π_B, dwz $\Pi_A \propto \Pi_B$.

Beantwoord onderstaande vier vragen.

(i) Probleem Π_A is NP-volledig. Wat betekent dit voor probleem Π_B?

(ii) Probleem Π_A behoort tot P. Wat betekent dit voor probleem Π_B?

(iii) Probleem Π_B is NP-volledig. Wat betekent dit voor probleem Π_A?

(iv) Probleem Π_B behoort tot P. Wat betekent dit voor probleem Π_A?

5d) Beschouw de 0-1 knapsackvoorwaarde

$$\{x \in \{0,1\}^6 \mid 17x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 2x_6 \leq 23\}\,.$$

Bepaal *twee* extended cover ongelijkheden voor dit knapsackprobleem.

Opgave 6. Gegeven is het onderstaande geheeltallig programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max z = & 5x_1 & + & x_2 & & \\
 & & & & & \\
\text{odv} & -3x_1 & + & 16x_2 & \geq & 8 \\
 & 5x_1 & + & 16x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 & , & x_2 & \text{geheeltallig} & \\
\end{array}$$

6a) Laat zien dat $(x_1, x_2) = (2, 1)$ een toegelaten oplossing is, en geef de bijbehorende z-waarde.

6b) Toon door middel van **branch-and-bound** aan dat $(x_1, x_2) = (2, 1)$ de optimale oplossing is. Maak hierbij efficiënt gebruik van het feit dat $(x_1, x_2) = (2, 1)$ een toegelaten oplossing is.
N.B. De LP-relaxaties mogen grafisch opgelost worden.

De normering is als volgt:

1) 18 punten			
2a) 3 punten	2b) 5 punten	2c) 4 punten	2d) 2 punten
3a) 4 punten	3b) 5 punten	3c) 5 punten	3d) 4 punten
4a) 10 punten	4b) 10 punten		
5a) 2 punten	5b) 6 punten	5c) 6 punten	5d) 4 punten
6a) 2 punten	6b) 10 punten		