Tentamen WI2608 Optimalisering (TUD) en Besliskunde 1 (UL) 15/04/2011

Er zijn zes opgaven in dit tentamen. Laat bij elk antwoord duidelijk zien hoe je eraan bent gekomen. De normering voor elke opgave staat na de laatste opgave. Het uiteindelijke cijfer krijg je door het totaal aantal punten door 10 te delen.

Het gebruik van een laptop is niet toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is wel toegestaan. Veel succes!

Opgave 1. De lijmfabriek GLUEFAST maakt drie verschillende soorten lijm: Standard, Glueall, en Gluelimit. De ingrediënten Sticky, Gluey, en Greasy worden in verschillende hoeveelheden bij de productie van de lijmen gebruikt. In onderstaande tabel worden de onder- en bovengrenzen op de hoeveelheden ingrediënten in de verschillende soorten lijm aangegeven.

	Lijmsoort					
	Standard		Glueall		Gluelimit	
Ingredient	min	max	min	max	min	max
Sticky	10%	50 %	40%	60%	25%	75%
Gluey	25%	35%	0%	0%	0%	35%
Greasy	25%	50%	40%	60%	0%	30%

Om een kilo lijm te produceren is precies een kilo van een mengsel van de ingrediënten nodig. De inkoopprijzen van de ingrediënten zijn respectievelijk EUR 100, 75, en 125 per kilo, en de verkoopprijzen voor de lijmsoorten zijn respectievelijk EUR 400, 380, en 320 per kilo. De fabriek moet om diverse redenen evenveel Sticky als Gluey inkopen. Bovendien kan de fabriek binnen de planningsperiode niet meer dan 100 kilo lijm in totaal produceren. Formuleer het productieplanningsprobleem als een lineair programmeringsprobleem gegeven dat het bedrijf de winst uit het verkoop van de lijmsoorten wil maximaliseren.

Opgave 2.

a) Los het volgende probleem op met behulp van het simplexalgoritme:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\min z & = & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{odv} & & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & & -x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & -1 \\
 & & & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

b) Formuleer het duale probleem behorend bij het probleem in 2a).

c) Hoe herkent het simplexalgoritme dat een LP-probleem onbegrensd is?

d) Hoe herkent het simplexalgoritme dat een LP-probleem meer dan een optimale oplossing heeft?

3.

a) Gegeven zijn een primaal probleem (P) en het bijbehorende duale probleem (D):

$$\text{(P): } \min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \text{ odv } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \ldots, m, \ x \geq 0,$$

$$\text{(D): } \max w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \text{ odv } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, \ j = 1, \ldots, n, \ y \text{ vrij},$$

Zij $\hat{x}$ een toegelaten oplossing voor (P) en $\hat{y}$ een toegelaten oplossing voor (D). Laat zien dat $c^T \hat{x} \geq b^T \hat{y}$.

b) Gegeven zijn problemen Π_A en Π_B die beide tot de klasse NP behoren. Verder bestaat er een polynomiale-tijd transformatie van Π_A naar Π_B, dwz $\Pi_A \propto \Pi_B$.

Beantwoord onderstaande vier vragen.

(i) Probleem Π_A behoort tot P. Wat betekent dit voor probleem Π_B?

(ii) Probleem Π_A is NP-volledig. Wat betekent dit voor probleem Π_B?

(iii) Probleem Π_B behoort tot P. Wat betekent dit voor probleem Π_A?

(iv) Probleem Π_B is NP-volledig. Wat betekent dit voor probleem Π_A?

c) Het probleem INDEPENDENT SET is als volgt gedefinieerd:

INDEPENDENT SET: Gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een geheel getal k, bevat G een deelverzameling $W \subseteq V$ van punten, met $|W| \geq k$, zodanig dat ieder punt in W aan geen ander punt in W grenst?

Bewijs dat INDEPENDENT SET een NP-volledig probleem is. Je mag veronderstellen dat CLIQUE NP-volledig is.

CLIQUE: Gegeven een ongerichte graaf $G' = (V', E')$ en een geheel getal k', bevat G' een volledige deelgraaf van grootte ten minste k'?

4. Het probleem

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & & \\
\text{odv} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 430 \\
 & 3x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 460 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 420 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq & 0 &
\end{array}$$

is opgelost met behulp van het simplexalgoritme. Het verkregen tableau ziet er als volgt uit:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
x_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
s_3	20	2	0	0	-2	1	1
$-z$	-1350	-4	0	0	-1	-2	0

a) Welke waarden van de doelfunctiecoëfficient c_2 van variabele x_2 geven een *andere* optimale oplossing dan de oplossing gegeven in het tableau?

b) Stel dat de de rechterzijdecoëfficienten de volgende nieuwe waarden krijgen: $b^T = (200, 500, 100)$. Geeft de nieuwe vector b dezelfde optimale basis? Waarom/Waarom niet? (NB! Je hoeft hiervoor **niet** het gehele probleem opnieuw op te lossen!)

c) Voeg de nieuwe voorwaarde $x_2 + 2x_3 \leq 400$ aan het oorspronkelijke probleem toe. Blijft de huidige optimale oplossing toegelaten? Zo nee, geef aan welke de nieuwe basisvariabelen zijn na de *eerste* iteratie in de duale simplexmethode. (NB: Los *niet* op.)

5. Toon aan dat de lengte van een tour verkregen door de "boomalgoritme" voor het symmetrische handelsreizigersprobleem waarbij de driehoeksongelijkheid geldt, nooit slechter is dan twee keer de lengte van een optimale handelsreizigerstour. (In het symmetrische handelsreizigersprobleem is $d_{ij} = d_{ji}$ voor alle punten i, en j, waarbij d_{ij} is de afstand van punt i naar punt j.) In het boomalgoritme wordt eerst de korste opspannende boom berekend, daarna worden alle kanten van de boom verdubbeld, en in deze laatste graaf wordt een Euleriaanse wandeling en bijbehorende handelsreizigerstour berekend.

6.

a) Bepaal twee *extended cover ongelijkheden* gebaseerd op de knapsackvoorwaarden

$$15x_1 + 14x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 \leq 17, \quad x \in \{0,1\}^8 .$$

b) Stel dat je een geheeltallig *minimaliseringsprobleem* oplost met behulp van Branch-and-Bound.

i) Hoe kan je een bovengrens op de optimale waarde bepalen?

ii) Stel dat je in knoop j van de zoekboom bent. Wanneer mag je concluderen dat je niet verder hoeft te zoeken direct onder knoop j?

c) Modelleer het volgende probleem als gemengd lineair geheeltallig optimaliseringsprobleem (doelfunctie hoeft niet):
De vector $x \in \mathbb{R}^n$ moet voldoen aan de ongelijkheden $0 \leq x \leq u$, en aan óf de ongelijkheid $a^1 x \leq b_1$ óf de ongelijkheid $a^2 x \leq b_2$.

De normering is als volgt:
1) 15 punten
2a) 8 punten 2b) 6 punten 2c) 4 punten 2d) 4 punten
3a) 6 punten 3b) 6 punten 3c) 8 punten
4a) 6 punten 4b) 6 punten 4c) 6 punten
5) 10 punten
6a) 4 punten 6b) 5 punten 6c) 6 punten