Tentamen WI2608 Optimalisering (Delft) en Besliskunde 1 (Leiden)

14 januari 2012, 14.00 - 17.00 uur

Het tentamen bestaat uit zes opgaven. Laat bij elk antwoord duidelijk zien hoe je eraan bent gekomen. Bij elke opgave staat het bijbehorende aantal punten. Het uiteindelijke cijfer krijg je door het totaal aantal punten door acht te delen.

Het gebruik van een laptop of grafische rekenmachine is niet toegestaan. Het gebruik van een niet-grafische rekenmachine is wel toegestaan. Veel succes!

---

1. (8 punten) Een bedrijf heeft m leveranciers voor een bepaald product. Het bedrijf kan het product aan n verschillende markten leveren, en voor elke leverancier i is gegeven aan welke deelverzameling van markten M_i hij kan leveren. Het aanbod van leverancier i van het product is gelijk aan s_i, en de vraag van markt j voor het product is gelijk aan d_j. Als het bedrijf het product levert aan markt j moet het bedrijf de hele vraag d_j leveren, maar de vraag hoeft niet van dezelfde leverancier te komen. De transportkosten per eenheid van leverancier i naar markt j zijn gelijk aan c_{ij}. Als het bedrijf niet levert aan markt j zijn de verloren inkomsten gelijk aan r_j. Het bedrijf wil de som van transportkosten en verloren inkomsten minimaliseren. Modelleer dit probleem als een lineair (gemengd) geheeltallig optimaliseringsprobleem.

2. (a) Je wilt een lineair maximaliseringsprobleem oplossen met behulp van het Simplexalgoritme. Na een aantal iteraties ziet het tableau er als volgt uit:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2
$-z$	-4		3		-2
s_1	4			1	1
x_1	2	1	-1		1

   i. (2 punten) Is de huidige basisoplossing optimaal (MOTIVEER JE ANTWOORD!)? Zo nee, welke variabelen (als ze bestaan!) zijn de volgende intredende en uittredende basisvariabelen?

   ii. (2 punten) Heeft het probleem een optimale oplossing? MOTIVEER JE ANTWOORD!

   (b) i. (6 punten) Bepaal voor het onderstaand probleem een toegelaten basisoplossing met behulp van het Simplexalgoritme (Fase 1).

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min z = & & & x_2 & & \\
\text{odv} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \geq & -2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

ii. (4 punten) Is de in opgave (b)i gevonden basisoplossing optimaal met betrekking tot de doelfunctie $\min z = x_2$? Het antwoord 'ja' of 'nee' met een bijbehorende korte motivatie volstaat.

3. (a) Gegeven is het volgende lineaire optimaliseringsprobleem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max z = & & & -4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & & \\
\text{odv} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & \geq & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0,
\end{array}
$$

i. (4 punten) Formuleer het bijbehorende duale probleem.

ii. (3 punten) De optimale oplossing van het duale probleem is $(\pi^*)^T = [2,\ 0]$ met doelfunctiewaarde $w^* = 6$. Bepaal met behulp van Complementary Slackness de optimale oplossing $x^*,\ z^*$ van het primale probleem.

(b) (5 punten) Laat A een $m \times n$ matrix en b een m-vector zijn. Bewijs de volgende variant van Farkas' Lemma:
Precies een van de volgende gevallen geldt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$$
$$\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0,\ \pi^T b < 0\} \neq \emptyset\,.$$

Hint: Gebuik dualiteit.

4. (a) (2 punten) Bewijs dat $2^{n+1} = \Theta(2^n)$.

(b) (8 punten) Geef antwoord 'waar' of 'niet waar' op de volgende vragen. (Geen toelichting nodig.)

i. Als een toegelaten basisoplossing x gedegenereerd is, dan correspondeert die oplossing altijd met meer dan één basis.

ii. De beslissingsversie van lineaire optimalisering: "bestaat er een vector x zodanig dat $Ax = b, x \geq 0$?" behoort tot de complexiteitsklasse P.

iii. Het Simplexalgoritme met Bland's anti-cycling pivotregel is een polynomiaal algoritme.

iv. Als een primaal probleem onbegrensd is, is het bijbehorende duale probleem niet-toegelaten.

v. Het minimale opspannende boom (MST) probleem is polynomiaal oplosbaar omdat de bijbehorende voorwaardenmatrix A altijd totaal unimodulair is.

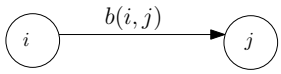
vi. In het duale Simplexalgoritme geldt bij maxproblemen dat $\bar{c}_j \leq 0$ voor iedere j in elke iteratie, en stopt het algoritme als $\bar{b}_i \geq 0$ voor iedere i. (Veronderstel dat het probleem toegelaten is.)

vii. Als een polynomiaal algoritme wordt gevonden voor een NP-volledig probleem impliceert dit dat de complexiteitsklassen P en NP gelijk zijn.

viii. Als probleem Π_2 NP-volledig is en probleem Π_1 reduceert naar Π_2 ($\Pi_1 \propto \Pi_2$), dan impliceert dit dat Π_1 ook NP-volledig is.

5. (a) (8 punten) Bepaal, met behulp van het Ford-Fulkerson algoritme, de maximale stroom (max flow) van punt 1 naar punt 4 in het volgende netwerk:

Notatie: $b(i,j)$ = capaciteit op pijl (i,j)



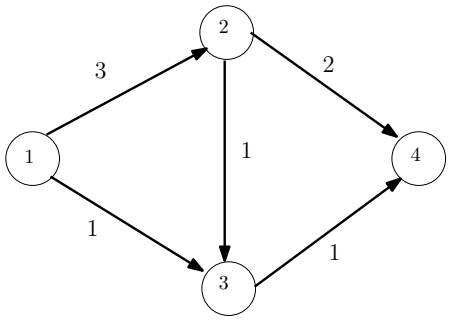


Figure 1:

Laat duidelijk zien wat er in elke iteratie gebeurt.

(b) (2 punten) Bepaal de minimum capaciteit snede (min cut) $(W, V \setminus W)$ in het netwerk van de (a)-opgave. Geef aan welke punten tot de deelverzameling W behoren, en de waarde van de snede. Hint: Maak gebruik van de informatie die je krijgt in de laatste iteratie van het Ford-Fulkerson algoritme in de (a)-opgave.

6. (a) Gegeven is het volgende IP-probleem:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & 3x_1 & + & 2.5x_2 & & \\
\text{odv} & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ geheeltallig}
\end{array}$$

De optimale oplossing van de bijbehorende LP-relaxatie is:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	$-9\frac{3}{4}$			$-\frac{1}{2}$		$-\frac{5}{4}$
x_1	2	1		1		
s_2	$\frac{1}{2}$			1	1	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{3}{2}$		1	-1		$\frac{1}{2}$

i. (2 punten) Bepaal een Gomorysnede van de rij waar x_2 basisvariabele is.

ii. (4 punten) Voeg de snede toe aan het optimale tableau, en her-optimaliseer met behulp van het duale Simplexalgoritme. (Als je het duale Simplexalgoritme vergeten bent, mag je het her-optimaliseren grafisch doen voor de helft van de punten.) Wat is de nieuwe optimale oplossing van de LP-relaxatie?

iii. (2 punten) Is de nieuwe oplossing optimaal met betrekking tot het oorspronkelijke IP-probleem? Het antwoord 'ja' of 'nee' met een korte motivatie volstaat.

(b) (6 punten) Los het probleem gegeven in opgave 6(a) op met behulp van Branch-and-Bound. NB! De optimale oplossing van de LP-relaxatie is al gegeven in het Simplextableau van 6(a). Verder mag je **geen** informatie gebruiken van het oplossen van opgave 6(a)! Om verder rekenwerk te besparen zijn hieronder een aantal LP-oplossingen weergegeven:
De oorspronkelijke LP-relaxatie (LP_0) plus voorwaarde $x_2 \leq 1$:
$(x_1, x_2)^T = (2,\ 1)^T,\ z_{LP} = 8,5.$
LP_0 plus voorwaarde $x_2 \geq 2$: $(x_1, x_2)^T = (1,5,\ 2)^T,\ z_{LP} = 9,5.$
LP_0 plus voorwaarden $x_2 \geq 2$ en $x_1 \leq 1$: $(x_1, x_2)^T = (1,\ 2)^T,\ z_{LP} = 8.$
LP_0 plus voorwaarden $x_2 \geq 2$ en $x_1 \geq 2$: Niet-toegelaten.

Gebruik de zoekstrategie:

- depth-first,
- $\leq$-tak eerst,
- fractie dichtstbij $\frac{1}{2}$.

Vergeet niet de optimale oplossing duidelijk aan te geven!