Tentamen Besliskunde 2 (28 januari 2005, 14.00-17.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Alle opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

Beschouw het symmetrisch handelsreizigersprobleem dat aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

a. Beschrijf de heuristiek die gebaseerd is op een minimale opspannende boom en een volmaakte koppeling met minimale lengte.

b. Bewijs dat de kwaliteit van deze heuristiek gelijk is aan $\frac{3}{2}$.

Opgave 2

Beschouw het minimale kostenstroomprobleem in een netwerk met onder- en bovengrenzen en met in knooppunt i een gegeven nettoproductie s_i, $1 \leq i \leq n$ met $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$.

Zij T een opspannende boom in de bijbehorende niet-gerichte graaf.

Bewijs de volgende beweringen:

a. Er is een unieke stroom x met $x_{ij} = 0$ voor alle $(i,j) \notin T$.

b. Voor iedere $(i,j) \in T$ geldt: als de pijl (i,j) de verbinding vormt van component T_i naar component T_j in $T - \{(i,j)\}$, dan is $x_{ij} = \sum_{k \in T_i} s_k$.

Opgave 3

Beschouw een schedulingsprobleem op m parallelle machines, d.w.z. dat een taak op iedere machine dezelfde bewerkingstijd heeft, zeg p_j voor taak j.

a. Bewijs dat voor iedere lijst-heuristiek $LIST$ geldt: $\frac{C_{max}(LIST)}{C_{max}(OPT)} \leq 2 - \frac{1}{m}$.

b. Geef voor willekeurige m de bewerkingstijden p_j van $2m-1$ taken en een lijst $LIST$ zdd. $C_{max}(LIST) = 2m - 1$ en $C_{max}(OPT) = m$, waaruit volgt dat de grens uit a scherp is.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

a. Los het volgende transportprobleem met 2 depots en 3 bestemmingen op:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b. Wat wordt de optimale oplossing bij de volgende veranderingen:

(i) $c_{11} = 6$;

(ii) de voorraad in depot 1 en de vraag in bestemming 3 worden beide met 1 verhoogd.

Opgave 5

Beschouw het niet-lineaire probleem $max \; \{x_1 \mid x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0; \; x_1, x_2 \geq 0\}$.

a. Bepaal de optimale oplossing x^* van dit probleem.

b. Laat zien dat x^* niet aan de KKT-voorwaarden voldoet.

Opgave 6

Beschouw een coöperatief spel met 3 spelers en met karakteristieke functie v waarvoor geldt:
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0; \; v(\{1,2\}) = 4, v(\{1,3\}) = 7, v(\{2,3\}) = 15; \; v(\{1,2,3\}) = 20.$

a. Bepaal de kern en teken deze in twee dimensies.

b. Bepaal de nucleolus.

c. Bepaal de Shapley-waarden.

Opgave 7

Beschouw een Markov beslissingsketen met als optimaliteitscriterium de gemiddelde opbrengst en met als data:

$S = \{1,2,3\}; \; A(1) = \{1,2\}, \; A(2) = \{1,2\}, \; A(3) = \{1\}.$

$r_1(1) = 4, \; r_1(2) = 2, \; r_2(1) = 1, \; r_2(2) = 5, \; r_3(1) = 3.$

$p_{12}(1) = p_{23}(1) = p_{31}(1) = 1; \; p_{12}(2) = p_{13}(2) = p_{21}(2) = p_{23}(2) = \frac{1}{2}.$

(de overige overgangskansen zijn 0).

a. Beargumenteer waarom deze keten irreducibel is.

b. Geef de formulering van het LP-probleem om de waarde-vector te bepalen en tevens het duale probleem ter bepaling van de optimale strategie (beide met getallen en niet de algemene formulering).

c. Als gegeven is dat de optimale strategie in toestand 1 actie 1 kiest en in toestand 2 actie 2, wat is dan de waarde-vector?