Tentamen Besliskunde 2 (1 april 2005, 14.00-17.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Alle opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

Bewijs de volgende stelling.

Zij A een matrix met elementen $0, +1, -1$ met in iedere kolom hoogstens twee niet-nul elementen. A is totaal unimodulair d.e.s.d. als de rijen van A in twee disjuncte deelverz. I_1 en I_2 zijn te verdelen zdd.
(1) als twee niet-nul elementen uit dezelfde kolom hetzelfde teken hebben, dan behoren de bijbehorende rijen tot verschillende deelverz;
(2) als twee niet-nul elementen uit dezelfde kolom verschillend teken hebben, dan behoren de bijbehorende rijen tot dezelfde deelverz.

Opgave 2

Beschouw de methode van Cauchy om een onbeperkte optimaliseringprobleem $max\ f(x)$, met $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie, op te lossen.
Bij de methode van Cauchy is $x^{k+1} = x^k + \lambda_k \cdot s^k$, met s^k zó gekozen dat de stijging infinitesimaal maximaal is en wordt de stapgrootte λ_k zó wordt bepaald dat $f(x^k + \lambda_k s^k) = max_\lambda\ f(x^k + \lambda s^k)$.
We noemen zo'n methode *sterk convergent* als $\nabla f(x^*) = 0$ voor ieder ophopingspunt x^* van de rij $\{x^k\}_{k=0}^\infty$.
Bewijs dat de methode van Cauchy sterk convergent is.

Opgave 3

Beschouw het matrixspel met $n \times m$ matrix A en veronderstel dat gemengde strategieën ($x \in \mathbb{R}^n_+$ voor speler 1 en $y \in \mathbb{R}^m_+$ voor speler 2) zijn toegestaan.
Bewijs de Hoofstelling van de matrixspelen, d.w.z. $max_x min_y\ x^T Ay = min_y max_x\ x^T Ay$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Los het symmetrische handelsreizigersprobleem m.b.v. Lagrange relaxatie op voor een probleem met 6 steden en de volgende afstanden: $c_{12} = 8,\ c_{13} = 2,\ c_{14} = 14,\ c_{15} = 26,\ c_{16} = 13,$ $c_{23} = 7,\ c_{24} = 4,\ c_{25} = 16,\ c_{26} = 8,\ c_{34} = 23,\ c_{35} = 14,\ c_{36} = 9,\ c_{45} = 12,\ c_{46} = 6$ en $c_{56} = 5$.
Start met $u^0 = 0$ en bepaal u^1 en u^2.

Opgave 5

Beschouw het $F_m \mid \mid C_{max}$ probleem (niet het $PF_m \mid \mid C_{max}$ probleem).
Toon met het verwisselingsargument aan dat er een optimaal schema bestaat waarin op de eerste twee machines dezelfde volgorde geldt.

Opgave 6

Een dief kan dageljks op dievenpad gaan en hij rooft dan met kans p_j een bedrag $j,\ 0 \leq j \leq N$.
Iedere dag dat hij op pad gaat heeft hij een pakkans p, in welk geval hij zijn totale buit, dus ook alles van de vorige dagen, kwijt is en 'het spel' uit is.
Tot hoe lang moet de dief op dievenpad gaan?
Modelleer dit als een optimaal stopprobleem van een Markov keten en neem als de toestand i het totale bedrag dat de dief bezit (zolang hij nog niet is gesnapt).

a. Laat zien dat het model monotoon is.
b. Bepaal een optimale strategie, d.w.z. bij welk bedrag moet de dief stoppen, en laat zien dat dit het moment is waarop zijn verwachte extra buit niet groter is dan zijn verwacht verlies (vanwege het gesnapt worden).