Tentamen Besliskunde 2 (18 januari 2011) 10 EC

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, kun je deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1
Bewijs de volgende stelling: Het combinatorisch optimaliseringsprobleem behoort tot de complexiteitsklasse $\mathcal{NPC}$.

Opgave 2 We beschouwen een nulsomspel met uitbetalingsmatrix $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$. Hierbij is a_{ij} de uitbetaling is van speler S_2 aan speler S_1, als S_1 rij i kiest en S_2 kolom j. De mogelijke strategieën van S_1 zijn

$$X = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;\middle|\; x_i \ge 0 \text{ voor alle } i \text{ en } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$

en de mogelijke strategieën van S_2 zijn

$$Y = \left\{(y_1, y_2, \dots, y_m) \;\middle|\; y_j \ge 0 \text{ voor alle } j \text{ en } \sum_{j=1}^{m} y_j = 1\right\}.$$

Dus als S_1 strategie $x \in X$ kiest, dan wil dat zeggen dat hij met kans x_i rij i kiest. Evenzo, als S_2 strategie $y \in Y$ kiest, dan betekent dat dat hij met kans y_j kolom j kiest. De verwachte uitbetaling van S_2 aan S_1 is dan $\sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$. Bewijs dat

$$\max_x \min_y x^T A y \ge \min_y \max_x x^T A y.$$

Opgave 3
Beschouw een systeen met twee bedienden. Klanten komen aan bij de eerste wachtrij, met bediende 1, volgens een Poisson proces met parameter λ. Na hier bediend te zijn gaan ze door naar een tweede wachtrij, waar bediende 2 werkzaam is. De bedieningsduur bij bediende i is negatief exponentieel verdeel met parameter μ_i, $i = 1, 2$.
We veronderstellen dat de wachtruimtes onbegrensd zijn en dat $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} < 1$, $i = 1, 2$.
Zij $P_{n,m}$ de stationaire kans dat er bij de twee bedienden n resp. m klanten zijn.
Toon aan dat $P_{n,m} = (1 - \rho_1)\rho_1^n(1 - \rho_2)\rho_2^m$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4
Los voor alle waarden van λ het volgende parametrisch LP-probleem op:

$$max \left\{ 5x_1 + (4+2\lambda)x_2 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcll} x_1 & & & \leq & 3; & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 & \leq & 2; & x_2 \geq 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6; & \end{array} \right\}.$$

Opgave 5
Op een onderhoudsbasis voor vliegtuigen wordt onder de huidige onderhoudsstrategie van elk vliegtuig dat voor onderhoud binnenkomt precies één van de vier motoren gereviseerd.
De revisietijd van een motor heeft een verwachte waarde van een $\frac{1}{2}$ dag met een spreiding van $\sigma = \frac{1}{3}$ dag. Er kan slechts één motor tegelijk gereviseerd worden. Onder de huidige onderhoudsstrategie komen vliegtuigen voor revisie binnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 3 vliegtuigen per 2 dagen.
Overwogen wordt om de onderhoudsstrategie te wijzigen zodat bij een revisie van een vliegtuig alle vier de motoren achtereenvolgens gereviseerd worden. Onder deze nieuwe strategie komen vliegtuigen voor revisie binnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 3 vliegtuigen per 8 dagen.
Vergelijk beide strategieën op grond van het gemiddeld aantal vliegtuigen dat in de werkplaats aanwezig is.

Opgave 6 Beschouw het volgende Markovbeslissingsprobleem met verdisconteringsfactor $\alpha = \frac{1}{2}$:
$S = \{1,2\}$. $A(1) = \{1,2\}$; $A(2) = \{1,2\}$.
$r_1(1) = 4$; $r_1(2) = 2$; $r_2(1) = -2$; $r_2(2) = 1$.
$p_{11}(1) = \frac{1}{3}$; $p_{12}(1) = \frac{2}{3}$; $p_{11}(2) = 0$; $p_{12}(2) = 1$; $p_{21}(1) = \frac{1}{2}$; $p_{22}(1) = \frac{1}{2}$; $p_{21}(2) = 1$; $p_{22}(2) = 0$.
a. Stel de optimaliteitsvergelijking op waarvan de waarde-vector de unieke oplossing is.
b. Geef de LP-formulering voor het bepalen van de waarde-vector.
c. Geef de DLP-formulering voor het bepalen van een optimale strategie en hoe wordt zo'n strategie uit een optimale oplossing van het DLP verkregen?
Geef in de onderdelen a, b en c de formulering met concrete getallen en dus niet in algemene termen.