Besliskunde 2, 10EC
13 januari 2012, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1: Minimale opspannende boom.
Beschouw een niet-gerichte samenhangende graaf $G = (V, E)$ waarin aan iedere tak (i, j) een reëel getal l_{ij}, de lengte, is toegekend. De lengte van een opspannende boom is de som van de lengtes van de takken in de boom; $l(e)$ is de lengte van tak e.

Bewijs de volgende bewering.
Een opspannende boom T heeft minimale lengte d.e.s.d.a. voor iedere tak e die niet tot T behoort geldt dat $l(e) \geq l(f)$ voor alle takken f in de kring $C_T(e)$ die ontstaat door tak e aan T toe te voegen.

Opgave 2: Recurrente betrekkingen
Beschouw de 2e-orde recurrente betrekking met constante coëfficiënten:

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, \; n = 3, 4, \ldots \\ a_1, \; a_2 \text{ gegeven randvoorwaarden,} \end{cases} \tag{1}$$

waarin A en B constanten zijn die niet van n afhangen en $B \neq 0$.
Bewijs de volgende twee beweringen:

1. Als de wortels α, β van de vergelijking $x^2 = Ax + B$ verschillend zijn, dan is

$$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n, \; n \geq 1, \tag{2}$$

   met constanten K_1 en K_2 die eenduidig bepaald zijn door a_1 en a_2.
2. Als de vergelijking $x^2 = Ax + B$ een tweevoudige wortel α heeft, dan is

$$a_n = (K_1 + nK_2)\alpha^n, \; n \geq 1, \tag{3}$$

   met constanten K_1 en K_2 die eenduidig bepaald zijn door a_1 en a_2.

Opgave 3: Markov ketens
Beschouw een irreducibele Markov keten met overgangsmatrix P en met periode d.
Laat G de bij de Markov keten behorende gerichte streng samenhangende graaf zijn
(G bevat de pijl (i, j) d.e.s.d. als $p_{ij} > 0$).
Laat B een opspannende gerichte boom in G zijn met een willekeurig gekozen wortel v_1 en laat $k(i)$ het aantal pijlen in B zijn om van v_1 naar v_i te komen voor alle i.
Bewijs dat geldt: $d = g.g.d. \; \{k(i) + 1 - k(j) \mid (v_i, v_j) \notin B\}$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4: Enumeratie

Vijf heren (Albert, Bernard, Cees, Dick en Emile) en vijf dames (Fien, Gertie, Henrike, Ingelise en Josine) hebben zich ingeschreven voor een tennistoernooi. Dit toernooi is een gemengd-dubbel toernooi, d.w.z. dat iedere heer met één van de dames een combinatie vormt. De dames mochten ten hoogste twee heren opgeven met wie ze niet wensten te spelen.

Deze wensen zijn als volgt: Fien wil niet spelen met Albert of Emile, Gertie niet met Cees of Dick, Henrike niet met Albert of Emile, Ingelise niet met Bernard en Josine niet met Cees.

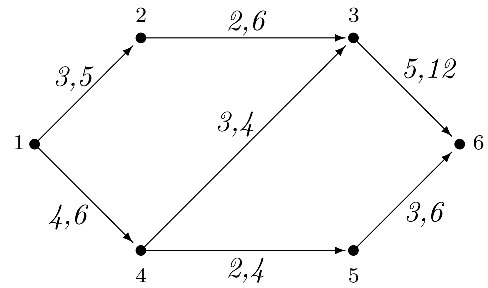
a. Op hoeveel verschillende manieren kunnen er 5 combinaties worden gevormd, waarbij rekening wordt gehouden met de wensen der dames?

b. Neem aan dat de 5 combinaties door loting worden gevormd. Hierbij heeft ieder van de toegestane mogelijkheden een gelijke kans om geloot te worden. Wat is de kans dat Albert en Josine een combinatie vormen?

Opgave 5

Beschouw het hiernaast getekende netwerk met onder- en bovengrenzen.

Toon aan, niet door te proberen, maar met de in het dictaat beschreven methode, dat dit netwerk een toelaatbare stroom heeft en bepaal een maximale stroom van knooppunt 1 naar knooppunt 6.



Opgave 6

Mendelsohn spel Twee spelers kiezen simultaan een geheel getal tussen 1 en 100. Als ze een gelijk getal kiezen, dan is er geen uitbetaling. De speler die een getal kiest dat 1 hoger is dan dat van zijn tegenstander, krijgt 1 van zijn tegenstander. De speler die een getal kiest dat minstens 2 hoger is dan dat van zijn tegenstander, moet 2 aan zijn tegenstander betalen.

a) Modelleer dit spel als een nulsom spel met een 100×100 uitbetalingsmatrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 100}$. Laat zien dat het voldoende is om het gereduceerde spel met uitbetalingsmatrix $(a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ op te lossen.

Omdat $A = -A^T$, m.a.w. A is min zijn getransponeerde, is dit een zogenaamd *symmetrisch spel*. Daarvoor geldt dat beide spelers dezelfde optimale strategie, zeg $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ hebben. Dit feit mag je gebruiken.

b) Voor het berekenen van het optimale strategiepaar (x^*, x^*) van de 2 spelers is het voldoende het volgende stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Toon dit aan.

c) Bereken de optimale strategiepaar.