Besliskunde 2, 6EC
13 januari 2012, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1: Minimale opspannende boom
Beschouw een niet-gerichte samenhangende graaf $G = (V, E)$ waarin aan iedere tak (i, j) een reëel getal l_{ij}, de lengte, is toegekend. De lengte van een opspannende boom is de som van de lengtes van de takken in de boom; $l(e)$ is de lengte van tak e.

Bewijs de volgende bewering.
Een opspannende boom T heeft minimale lengte d.e.s.d.a. voor iedere tak e die niet tot T behoort geldt dat $l(e) \geq l(f)$ voor alle takken f in de kring $C_T(e)$ die ontstaat door tak e aan T toe te voegen.

Opgave 2: Recurrente betrekkingen
Beschouw de 2e-orde recurrente betrekking met constante coëfficiënten:

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, \ n = 3, 4, \ldots \\ a_1, \ a_2 \text{ gegeven randvoorwaarden,} \end{cases} \tag{1}$$

waarin A en B constanten zijn die niet van n afhangen en $B \neq 0$.
Bewijs de volgende twee beweringen:

1. Als de wortels α, β van de vergelijking $x^2 = Ax + B$ verschillend zijn, dan is

$$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n, \ n \geq 1, \tag{2}$$

   met constanten K_1 en K_2 die eenduidig bepaald zijn door a_1 en a_2.
2. Als de vergelijking $x^2 = Ax + B$ een tweevoudige wortel α heeft, dan is

$$a_n = (K_1 + nK_2)\alpha^n, \ n \geq 1, \tag{3}$$

   met constanten K_1 en K_2 die eenduidig bepaald zijn door a_1 en a_2.

Opgave 3: Netwerkstromen.
We beschouwen een netwerk $G = (V, A)$ met ondergrenzen 0, capaciteiten b_{ij} en kosten c_{ij} voor iedere pijl $(i, j) \in A$. Laat x een stroom zijn met N_x de bijbehorende groeigraaf en l^x gedefinieerd door

$$l^x_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{als } (i,j) \text{ een voorwaartse pijl in } N_x \text{ is} \\ -c_{ji}, & \text{als } (i,j) \text{ een achterwaartse pijl in } N_x \text{ is.} \end{cases}$$

Bewijs de volgende bewering: x is een minimale kostenstroom bij waarde k d.e.s.d.a. $l^x(C) \geq 0$ voor iedere enkelvoudige ronde C in N_x.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

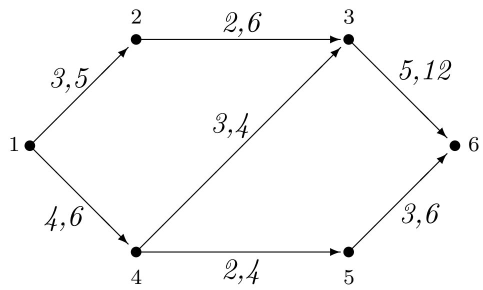
Vijf heren (Albert, Bernard, Cees, Dick en Emile) en vijf dames (Fien, Gertie, Henrike, Ingelise en Josine) hebben zich ingeschreven voor een tennistoernooi. Dit toernooi is een gemengd-dubbel toernooi, d.w.z. dat iedere heer met één van de dames een combinatie vormt. De dames mochten ten hoogste twee heren opgeven met wie ze niet wensten te spelen.
Deze wensen zijn als volgt: Fien wil niet spelen met Albert of Emile, Gertie niet met Cees of Dick, Henrike niet met Albert of Emile, Ingelise niet met Bernard en Josine niet met Cees.

a. Op hoeveel verschillende manieren kunnen er 5 combinaties worden gevormd, waarbij rekening wordt gehouden met de wensen der dames?

b. Neem aan dat door loting de 5 combinaties worden gevormd. Hierbij heeft ieder van de toegestane mogelijkheden een gelijke kans om geloot te worden. Wat is de kans dat Albert en Josine een combinatie vormen?

Opgave 5

Beschouw het hiernaast getekende netwerk met onder- en bovengrenzen.
Toon aan, niet door te proberen, maar met gebruikmaking van de in het dictaat beschreven methode, dat dit netwerk een toelaatbare stroom heeft en bepaal een maximale stroom van knooppunt 1 naar knooppunt 6.



Opgave 6

Je moet een autoverzekering af sluiten en daartoe heb je offertes van verzekeringsmaatschappijen $1, \ldots, n$ aangevraagd. Daarmee bezig zijnde, zie je op de buis reclame voor het 'beste aanbod' (even ... bellen) van maatschappij $n+1$. Je belt en krijgt een aanbod, en je moet een afweging maken welke offerte de 'beste' is.

Dat is niet eenvoudig, omdat je geen statistieken tot je beschikking hebt, maar alleen de kennis over je eigen rijgedrag. Kwantificeren van de verschillende opties is daardoor niet haalbaar. Het lijkt dan beter om paarsgewijs preferenties voor offertes te bepalen. D.w.z. voor elk paar offertes bepaal je aan welk van de twee je de voorkeur geeft.

a) Is er altijd een rangorde van de $n+1$ offertes te maken, zodat je offerte i prefereert boven offerte $i+1$?

b) Stel $n = 7$, d.w.z. je hebt 8 offertes. In de tabel hiernaast staan de door jou bepaalde preferenties. Zul je van het t.v. aanbod offerte 8 gebruik maken?

Offerte	Geprefereerd boven:
1	4
2	1,6
3	1,2,4,6,7,8
4	2,6
5	1,2,3,4,6,8
6	1
7	1,2,4,5,6,8
8	1,4,2,6