Tentamen Besliskunde 2
9 januari 2013, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.
N.B. Schrijf s.v.p. boven je tentamen of je het vak voor 6 of 10 EC wilt doen!

Deel 1: Theorie

Opgave 1: Stelling van Nash
Bewijs de volgende uitspraak: *Ieder bi-matrix spel heeft minstens één evenwichtspaar.*
Je mag hierbij Brouwer's vaste-puntstelling gebruiken.

Opgave 2
Laat $X = \{X_t\}_{t=0,1,2,...}$ een discrete tijd Markovketen zijn met waarden in de eindige toestandruimte $\boldsymbol{S}$. Laat $p_{ii}^{(t)} = \mathsf{P}\{X_t = i \,|\, X_0 = i\}$, $t = 0, 1, 2 \ldots$. Toestand i is transiënt als

$$f_{ii} = \mathsf{P}\{\exists t \geq 1 \text{ zodat } X_t = i \,|\, X_0 = i\} < 1.$$

Toon aan dat toestand i transiënt is d.e.s.d.a. $\sum_t p_{ii}^{(t)} < \infty$.

Opgave 3
Beschouw een continue Markov keten $\{X(t),\ t \geq 0\}$ met waarden in de eindige toestandsruimte $\boldsymbol{S}$. Noteer $\mathbb{P}\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$ met $p_{ij}(t)$ en de generator matrix met Q. Laat T_i de verblijftijd in toestand i zijn, die exponentieel verdeeld is met parameter ν_i.

Beschouw de discrete Markov keten $\overline{P} = (\overline{p}_{ij})$ met

$$\overline{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\nu_i}{\nu} \cdot p_{ij}, & j \neq i \\ 1 - \frac{\nu_i}{\nu}, & j = i, \end{cases}$$

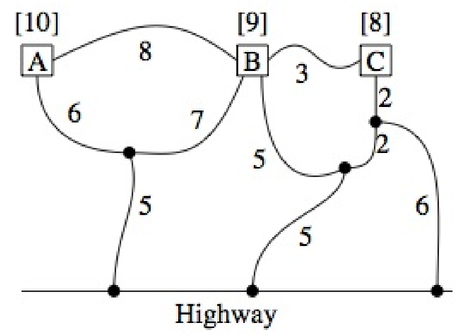
waarbij $\nu \geq \nu_i$ voor alle i en $p_{ij} = q_{ij}/\nu_i$.

Zij $\{N(t)\}$, $t \geq 0\}$ een Poisson proces met parameter ν en beschouw de continue Markov keten $\{\overline{X}(t)\}$, $t \geq 0\}$ met $\overline{X}(t) = \overline{X}_{N(t)}$, waarbij $\overline{X}_{N(t)}$ de discrete tijd Markov keten met transities $\overline{p}_{ij}$ is, en waarvoor geldt $\overline{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$.
Toon aan dat $p_{ij}(t) = \overline{p}_{ij}(t)$ voor alle $i, j \in S$ en alle $t \geq 0$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Drie boerderijen A,B en C zijn met elkaar en met de snelweg ('highway') verbonden door onverharde paden, zoals in nevenstaande figuur staat geschetst. Elke boer ziet er voordeel in om een bestaand onverhard pad van zijn boerderij naar de snelweg te plaveien.



De bedragen tussen haken in het plaatje zijn de gekwantificeerde geschatte voordelen per boerderij. De kosten om een onverhard (stuk) pad te plaveien staan bij de betreffende paden.

Uit de bedragen is duidelijk dat het voor geen van de boeren een voordeel is om in zijn eentje een pad naar de snelweg te plaveien. Samenwerking van de drie boeren zou voordeliger zijn. De vraag is: hoe voordelig en hoe zouden de kosten verdeeld moeten worden. Dit gaan we modelleren als een coöperatief spel.

a) Bepaal de spelers en de karakteristieke functie. Ga ervan uit dat de boeren altijd de goedkoopste optie kiezen voor het plaveien van paden (of ze nu samenwerken of niet). Verifieer de eigenschappen van karakteristieke functie.

b) Bepaal de Shapley waarde.

c) Bepaal de nucleolus. Is de kern wel of niet leeg? Motiveer.

d) Wat zijn de daadwerkelijke kosten per boer, bij de kostenverdeling volgens de Shapleywaarde en volgens de nucleolus?

Opgave 5

Beschouw het volgende Markov beslissingsprobleem met het verdisconteerde opbrengstencriterium en verdisconteringsfactor $\alpha = \frac{1}{2}$:

$S = \{1, 2\}$; $A(1) = \{1, 2\}$; $A(2) = \{1, 2\}$.

$r_1(1) = 1$; $r_1(2) = 5$; $r_2(1) = 4$; $r_2(2) = 2$.

$p_{11}(1) = 0 = 1 - p_{12}(1)$; $p_{11}(2) = \frac{1}{4} = 1 - p_{12}(2)$; $p_{21}(1) = \frac{1}{2} = p_{22}(2)$; $p_{21}(2) = 1 = 1 - p_{22}(2)$.

a. Stel de optimaliteitsvergelijking op waarvan de waarde-vector de unieke oplossing is. Geef de formulering in concrete getallen en niet in algemene termen.

b. Beschouw de deterministische strategie f^∞, gegeven door $f(1) = 2$ en $f(2) = 1$. Bereken de verdisconteerde opbrengstvector $v^\alpha(f^\infty)$.

c. Toon aan dat de strategie uit onderdeel b α-verdisconteerd optimaal (maximaal) is.

Opgave 6 Cloud computing

Om piekperiodes in de vraag goed op te kunnen vangen heeft Amazon.com een overcapaciteit aan computerfaciliteiten. Daarom biedt Amazon.com aan klanten de mogelijkheid om tegen betaling tijdens rustiger periodes gebruik te maken van zijn computerfaciliteiten.

Niet alle klanten hebben behoefte aan een even grote rekencapaciteit. Sommige klanten willen daardoor meer zogenaamde 'virtuële machines' (VM's) dan andere. Aankomende klanten wier vraag niet voldaan kan worden, gaan verloren (worden geblokkeerd). Amazon.com is geïnteresseerd in de fractie van klanten die verloren gaan.

We bekijken een klein voorbeeld. Neem aan dat er 5 VM's beschikbaar zijn. Type 1 klanten zijn de klanten die 1 VM nodig hebben. Deze komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ_1 en hebben de VM een exponentieel verdeelde tijd nodig met parameter μ_1. Type 2 klanten zijn klanten die 2 VM's nodig hebben (en geen genoegen nemen met minder). Deze komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ_2. Type 2 klanten hebben de twee VM's in het totaal een exponentieel verdeelde duur nodig met parameter μ_2.

Aankomstprocessen en bedieningsduren zijn onafhankelijk van elkaar. $X_{t,i}$ is het aantal type i klanten in het systeem op tijdstip t, $i = 1, 2$. $X_t = (X_{t,1}, X_{t,2})$, $t \geq 0$, is dus een twee-dimensionaal proces.

a) Specificeer de toestandsruimte, en de overgangsintensiteiten van het proces.

b) Stel dat X_t, $t \geq 0$, stationair is. Laat zien dat X_t reversibel is.

c) Bereken de stationaire verdeling.

d) Geef (in termen van de stationaire kansen) de blokkeringskans voor type 1, voor type 2 en voor willekeurige aankomende klanten. Specificeer het gemiddelde aantal ongebruikte VM's per tijdseenheid, ook in termen van de stationaire kansen.