Hertentamen Besliskunde 2
1 februari 2013, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.
N.B. Schrijf s.v.p. boven je tentamen of je het vak voor 6 of 10 EC wilt doen!

Deel 1: Theorie

Opgave 1:
Beschouw een twee-persoonsnulsomspel met $n \times m$-uitbetalingsmatrix A. De verzameling van gemengde strategieën voor speler 1 is

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n)^T \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\, x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\},$$

die voor speler 2 is

$$Y = \{(y_1, \ldots, y_m)^T \mid \sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\, y_j \geq 0, j = 1, \ldots, m\}.$$

Als speler 1 strategie $x \in X$ kiest en speler 2 strategie $y \in Y$, dan is $x^T Ay$ de verwachte uitbetaling van speler 2 aan speler 1.
Bewijs de *Hoofdstelling van matrixspelen:*

$$\max_x \min_y x^T Ay = \min_y \max_x x^T Ay.$$

Opgave 2
Zij $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ een rij onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen. Schrijf $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ voor de cumulatieve sommen. Definieer het vernieuwingsproces $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ door

$$N(t) = \sup\{n \,|\, S_n \leq t\}.$$

Toon aan dat $m(t) = \mathsf{E}N(t) < \infty$ voor $t \geq 0$.

Opgave 3
Beschouw een systeem met twee bedienden. Klanten komen aan bij de eerste wachtrij, met bediende 1, volgens een Poisson proces met parameter λ. Na hier bediend te zijn gaan ze door naar een tweede wachtrij, waar bediende 2 werkzaam is. De bedieningsduur bij bediende i is negatief exponentieel verdeeld met parameter μ_i, $i = 1, 2$.
We veronderstellen dat de wachtruimtes onbegrensd zijn en dat $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} < 1$, $i = 1, 2$.
Zij $P_{n,m}$ de stationaire kans dat er bij de twee bedienden n resp. m klanten zijn.
Toon aan dat $P_{n,m} = (1 - \rho_1)\rho_1^n(1 - \rho_2)\rho_2^m$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

In een fabriek van halfgeleiders vindt het volgende productieproces plaats: op ruwe plakken silicium worden in 3 productiefasen halfgeleiders aangebracht, ongeveer 10.000 per plak. De tijd die nodig is per productiefase is 2 dagen. Na elke fase is een meetpunt. Alle plakken worden gemeten. Bij elke meting blijkt er een positieve kans te zijn dat de laatst uitgevoerde fase overgedaan moet worden. Ook is er na de tweede en derde fase een bepaalde kans dat de plak helemaal opnieuw moet beginnen. Deze kansen staan in de volgende matrix gegeven; hierbij representeren toestanden I,II en III fasen 1, 2 en 3 respectievelijk.

$$
\begin{array}{c}
 \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{klaar}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{klaar} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4/10 & 6/10 & 0 & 0 \\
2/10 & 2/10 & 6/10 & 0 \\
2/10 & 0 & 2/10 & 6/10 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

a) De fases waarin een plak zich achtereenvolgens bevindt, vormen een Markovketen. Bepaal de klassen van deze Markovketen en of zij transiënt, dan wel positief of nul-recurrent zijn.

b) Bereken de verwachte doorlooptijd van een plak (i.e. de verwachte tijd die een plak in het productieproces doorbrengt).

We veronderstellen dat bij elk meetpunt een bepaalde kans is dat de plak definitief wordt afgekeurd (gegeven dat een plak niet wordt afgekeurd blijven de overgangskansen naar de verschillende productie fasen gelijk). Laten deze afkeurkansen in fases I, II en III resp. 1/10, 1/10 en 3/10 zijn.

c) Bereken de kans dat een plak definitief wordt afgekeurd.

d) Wat is het aantal vergeefse productiehandelingen per plak (dus gegeven dat de plak wordt afgekeurd).

Opgave 5 [Shapley 1981] De regio-besturen van de regio's in de staat New York staan onder supervisie van een Raad van Toezicht die bestaat uit afgevaardigden van de deelgemeenten. Per deelgemeente is er één afgevaardigde. Omdat de verschillende gemeenten nogal verschillen in grootte, hebben hun afgevaardigden niet allemaal een even zwaar wegende stem wanneer er over besluiten moet worden gestemd. Hergeformuleerd betekent dit dat niet elke afgevaardigde 'evenveel' stemmen heeft. ' De volgende tabel illustreert de situatie in 'Nassau County" in 1964.

Gemeente	Bevolkingsgrootte	Percentage	Aantal stemmen	Percentage
Hempstead 1	728.625	57,1	31	27,0
Hempstead 2			31	27,0
Oyster Bay	285.545	22,4	28	24,3
North Hempstead	213,335	16,7	21	18,3
Long Beach	25.654	2,0	2	1,7
Glen Cove	25.654	1,8	2	1,7
Totaal			115	

Voor besluitvorming is een meerderheid van 58 stemmen (minimaal) nodig.

a) De 'macht' van elke gemeente in besluitvorming kunnen we berekenen via de Shapleywaarde van een enkelvoudig spel. Formuleer dit spel en bereken de Shapleywaarde (Hint: direct uitrekenen of de axioma's die de Shapleywaarde bepalen gebruiken).

b) Als het goed is, heb je berekend dat de onderste drie gemeenten in de tabel zelfs gezamenlijk niet genoeg macht hebben, om de besluitvorming te beïnvloeden. Dat werd onwenselijk gevonden en daarom is in 1971 besloten dat een meerderheid van minimaal 63 stemmen nodig is voor besluitvorming. Bereken de Shapley waarde onder deze nieuwe regel.

Opgave 6

Bussen vertrekken elk uur van de bushalte. De busmaatschappij overweegt een extra bus per uur in te zetten. De vraag is hoe deze ingeroosterd moet worden, opdat de totale verwachte wachttijd van de reizigers die per uur aankomen minimaal is. De totale capaciteit van de bus speelt geen rol.

We willen dit probleem modelleren als een optimaal stopprobleem. Daartoe discretiseren we de tijd door een uur de verdelen in T gelijke tijdsintervallen met lengte $1/T$ uur. De vraag is dan: welke aankomsttijdstip t/T, $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ van de extra bus minimaliseert de totale verwachte wachttijd van de reizigers die per uur aankomen?

Veronderstel eerst dat het aankomstproces van reizigers een Poissonproces is met parameter λ (gerekend in uren). Zonder de extra bus is de gemiddelde wachttijd van een willekeurige reiziger een half uur (de helft van de lengte van het beschouwde tijdsinterval). Er komen er gemiddeld λ per uur aan. Uit de Stelling van Wald volgt dat de totale verwachte wachttijd van alle reizigers die per uur aankomen is $\lambda/2$ uur.

a. Modelleer dit probleem als een optimaal monotoon stopprobleem (met horizon T). Wat is de optimale strategie? Is dat intuïtief ook te verwachten?

b. Het blijkt dat er geen extra bussen beschikbaar zijn, maar wel kan een andere buslijn omgeleid worden. Dit heeft tot gevolg dat de mogelijke aankomsttijden van de extra bus in het interval $\{\lfloor 2/(3T) \rfloor, \ldots, T\}$ liggen. Wat is de optimale strategie?

c. Stel het aankomstproces van klanten in het tijdsinterval $(t/T, (t+1)/T]$ is een Poissonproces met parameter λ_t, $t = 0, \ldots, T-1$, waarbij de λ_t onderling mogen verschillen. Laat zien dat het optimale stopprobleem monotoon is, als $t \mapsto \lambda_t(T-t)$ een niet-stijgende functie is van t. Wat is de optimale strategie?