

Hertentamen Besliskunde 3 (5 juli 2013, 10.00-13.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1 Principe van in- en exclusie

We beschouwen een collectie objecten met een lijst eigenschappen uit de collectie $\{1, \dots, r\}$. $N(i_1, \dots, i_k)$ is het aantal objecten dat in ieder geval eigenschappen i_1, \dots, i_k heeft. Bewijs de volgende bewering.

Het aantal objecten dat tenminste één der eigenschappen bezit is gelijk aan

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, r\}: \\ i_j \neq i_l, j \neq l}} (-1)^{k-1} N(i_1, \dots, i_k).$$

Opgave 2 Stromen met boven- en ondergrenzen

Laat $N = (V, A)$, $V = \{1, \dots, n\}$, een netwerk met aan pijl (i, j) toegevoegd de getallen $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{N}_0$, $a_{ij} \leq b_{ij}$. We definiëren een geassocieerd netwerk $\bar{N} = (\bar{V}, \bar{A})$ met ondergrenzen gelijk aan 0 en bovengrenzen \bar{b}_{ij} als volgt:

$$\bar{V} = V \cup \{s\} \cup \{t\}; \bar{A} = A \cup (n, 1) \cup A_s \cup A_t, \text{ met}$$

$$A_s = \{(s, j) \mid j \in V, \sum_k a_{kj} > 0\}$$

$$A_t = \{(i, t) \mid i \in V, \sum_k a_{ik} > 0\}$$

en

$$\bar{b}_{n1} = \infty; \quad \bar{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_{ij}, & (i, j) \in A \\ \sum_k a_{kj}, & i = s, (s, j) \in A_s \\ \sum_k a_{ik}, & j = t, (i, t) \in A_t. \end{cases}$$

Bewijs de volgende bewering.

Als N een toelaatbare stroom heeft, dan heeft \bar{N} een volgemaakte stroom \bar{x} .

Opgave 3 Scheduling

We willen een planning maken voor n taken op één machine, waarbij taak j bewerkingstijd p_j en due date d_j heeft, $j = 1, \dots, n$.

Voor een gegeven planning is C_j het tijdstip waarop taak j klaar is. Ken aan taak j gewicht w_j toe. Het doel is een planning te bepalen met minimale $\sum_j w_j C_j$, d.w.z. met minimale gewogen som van de tijdstippen dat de taken klaar zijn.

Bewijs de volgende bewering.

Het schedule waarbij de taken gepland zijn in volgorde van niet-dalende p_j/w_j is optimaal voor het criterium $\sum_j w_j C_j$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4 Gegeven een alfabet bestaande uit de letters A, B, C, D met respectievelijke frequenties f_A, f_B, f_C, f_D , waarbij $0 < f_A \leq f_B \leq f_C \leq f_D$. In elk van de volgende gevallen specificeer de frequenties die onderstaande Huffman code van de letters kan opleveren, of leg uit waarom dat niet kan:

- Code 00, 01, 10, 1 (dus 00 codeert A, 01 codeert B, 10 C en 1 D).
- Code 01, 1, 000, 001.
- Code 000, 001, 01, 1.
- Decodeer het woord 011000001110001 (voor elke goede codering).

Opgave 5 Beschouw een project dat bestaat uit 7 activiteiten (A t/m G) met de volgende gegevens:

Activiteit	a	m	b	Voorganger
A	2	5	8	-
B	6	9	12	A
C	5	14	17	A
D	5	8	11	B
E	3	6	9	C,D
F	3	12	21	-
G	4	4	4	E,F

waarbij a, m, b de optimistische, modale resp. pessimistische schatting van de tijdsduur is.

Beantwoord de volgende vragen onder de aannames die voor dit model (*PERT*) gebruikelijk zijn:

- Wat is de verwachte tijdsduur van het project en wat is de variantie?
- Hoe groot is de kans dat het project 3 dagen eerder af is dan de te verwachten tijdsduur?

Opgave 6

Beschouw het volgende citaat: "LAS U AL DE LAATSTE VAN HALL OVER HUWELIJK EN TRANSVERSALEN? NEE, IK WACHT TOT ZE HET VERTALEN!" Is het mogelijk om uit elk van de 18 woorden een letter te kiezen, zo dat de gekozen letters verschillend zijn? Geef een bewijs voor je bewering.

TABEL: KANSEN STANDAARD NORMALE VERDELING

Laat z standaard normaal verdeeld zijn; notatie: $z = N(0, 1)$.

In onderstaande tabel staan de getallen $\mathbb{P}[0 \leq z \leq z]$ voor $z = 0.00, 0.01, \dots, 3.09$.

Voorbeeld: $\mathbb{P}[0 \leq z \leq 1.56] = 0.4406$ (zie de rij van 1.5 en de kolom van .06).

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2375	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4191	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4805	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4872	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990