Tentamen Besliskunde 3 (11 juni 2012, 14.00-17.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

Beschouw een continue Markov keten $\{X(t),\ t \geq 0\}$, noteer $\mathbb{P}\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$ met $p_{ij}(t)$ en de generator matrix met Q.

a. Bewijs de voorwaartse diffentiaalvergelijking $p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)q_{kj},\ i,j \in S,\ t \geq 0$.

b. Laat T_i de verblijftijd in toestand i zijn, die exponentieel verdeeld is met parameter ν_i.

Beschouw de discrete Markov keten $\overline{P} = (\overline{p}_{ij})$ met $\overline{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\nu_i}{\nu} \cdot p_{ij}, & j \neq i \\ 1 - \frac{\nu_i}{\nu}, & j = i, \end{cases}$ waarbij $\nu \geq \nu_i$ voor alle i en $p_{ij} = q_{ij}/\nu_i$.

Zij $\{N(t)\},\ t \geq 0\}$ een Poisson proces met parameter ν en beschouw de continue Markov keten $\{\overline{X}(t)\},\ t \geq 0\}$ met $\overline{X}(t) = \overline{X}_{N(t)}$, waarbij $\overline{X}_{N(t)}$ de discrete Markov keten met transities $\overline{p}_{ij}$ is, en waarvoor geldt $\overline{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$.

Toon aan dat $p_{ij}(t) = \overline{p}_{ij}(t)$ voor alle $i, j \in S$ en alle $t \geq 0$.

Opgave 2

Beschouw het probleem om n taken $\{J_1, \ldots, J_n\}$ te schedulen op één machine. Taak J_i heeft due date d_i en bewerkingstijd p_i, $i = 1, \ldots, n$.

Gevraagd: een schema S waarbij (1) het aantal taken waarvoor de due date overschreden wordt, minimaal is en (2) onder alle schema's met eenzelfde aantal taken waarvoor de due date overschreden wordt, heeft S de kortste bewerkingstijd.

Dit schema kan geconstrueerd worden m.b.v. het volgende algoritme.

Het algoritme van Moore

1. Orden de taken zodanig dat $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$; $S = \emptyset$; $p = 0$.

2. Voor $j = 1, 2, \ldots, n$ doe:

   a. $S := \{S, j\}$; $p := p + p_j$.

   b. Indien $p > d_j$, dan: bepaal l zódat $p_l = max_{k \in S}\ p_k$ en verwijder l uit S; $p := p - p_l$.

3. $S := \{S, \{1, 2, \ldots, n\} \backslash S\}$.

Toon deze bewering aan.

Opgave 3

Gegeven n objecten met respectievelijke waarden $p_j > 0$ en volumina $a_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Bij het fractionele knapzakprobleem is het toegestaan een deel van een object te kiezen.

Het doel is dan de totale waarde van de gekozen (deel)objecten te maximaliseren onder de beperking dat het totale volume van de gekozen (deel)objecten een voorafgekozen waarde b niet overschrijdt.

Neem aan de de objecten zo genummerd zijn dat $p_1/a_1 \geq p_2/a_2 \geq \cdots \geq p_n/a_n$. Verder nemen we aan dat $\sum_j a_j > b$, opdat het probleem niet triviaal zij.

Uit de LP-formulering volgt dat het fractionele knapzakprobleem een optimale oplossing heeft. Toon aan dat de optimale oplossing gevonden kan worden m.b.v. het volgende algoritme.

Algoritme 1 1. $volume = 0$; voor $j = 1, 2, \ldots, n$ doe: $x_j = 0 :\ j = 1$.

2. Als $volume + a_j \leq b$, dan:

   $x_j = 1$; $volume := volume + a_j$.

   als $j \leq n - 1$ doe: $j := j + 1$ en ga naar stap 2;

   anders: STOP.

   Anders: $x_j = \frac{b - volume}{a_j}$ en STOP.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Beschouw het volgende Markov beslissingsprobleem met verdisconteringsfactor $\alpha = \frac{1}{2}$:
$S = \{1,2\}$; $A(1) = \{1,2\}$; $A(2) = \{1,2\}$.
$r_1(1) = 4$; $r_1(2) = 2$; $r_2(1) = -2$; $r_2(2) = 1$.
$p_{11}(1) = \frac{1}{3} = 1 - p_{12}(1)$; $p_{11}(2) = 0 = 1 - p_{12}(2)$; $p_{21}(1) = \frac{1}{2} = p_{22}(2)$; $p_{21}(2) = 1 = 1 - p_{22}(2)$.

a. Stel de optimaliteitsvergelijking op waarvan de waarde-vector de unieke oplossing is. Geef de formulering in concrete getallen en niet in algemene termen.

b. Beschouw de deterministische strategie f^∞, gegeven door $f(1) = 1$ en $f(2) = 2$. Bereken de verdisconteerde opbrengstvector $v^\alpha(f^\infty)$.

c. Toon aan dat de strategie uit onderdeel b α-verdisconteerd optimaal is.

Opgave 5

Beschouw een project dat bestaat uit 7 activiteiten (A t/m G)met de volgende gegevens:

Activiteit	a	m	b	Voorganger
A	2	5	8	-
B	6	9	12	A
C	5	14	17	A
D	5	8	11	B
E	3	6	9	C,D
F	3	12	21	-
G	4	4	4	E,F

waabij a, m, b de optimistische, modale resp. pessimistische schatting van de tijdsduur is.
Beantwoord de volgende vragen onder de aannames die voor dit model ($PERT$) gebruikelijk zijn:

a. Wat is de verwachte tijdsduur van het project en wat is de variantie?
b. Hoe groot is de kans dat het project 3 dagen eerder af is dan de te verwachten tijdsduur?

Opgave 6

Een databank heeft N *verschillende* items die gebruikt worden voor transacties. Een transactie heeft met kans $1/M$ een deelverzameling bestaande uit m items nodig, $1 \leq m \leq M$, voor zekere $M \leq N$. Elke gegeven deelverzameling van m items is even waarschijnlijk.

Aanvragen voor transacties komen binnen volgens een Poisson (λ) proces. De verwerkingstijd van een transactie die bestaat uit m items, is exp (μ) verdeeld. Een item dat gebruikt wordt bij de behandeling van een transactie, is niet beschikbaar voor andere transacties zolang de verwerking duurt. Aanvragen voor transacties waarvoor niet alle items beschikbaar zijn, gaan verloren. Dit model kan beschreven worden door een continue tijd Markovketen met als toestanden $n = (n_1, \ldots, n_M)$, met $n_m = \#$ *transacties van* m *items*, $1 \leq m \leq M$.

a) Laat zien dat de overgangsintensiteiten gegeven worden door

$$\begin{aligned} q_{n,n+e_m} &= \lambda \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{\binom{N-\sum_i in_i}{m}}{\binom{N}{m}}, \qquad \sum_i in_i + m \leq N \\ q_{n,n-e_m} &= n_m \cdot \mu, \qquad\qquad\qquad \text{als } n_m > 0, \end{aligned}$$

waarbij $m \in \{1, \ldots, M\}$, e_m is m-de eenheidsvector, en $q_{n,n} = -\sum_{n' \neq n} q_{n,n'}$.

b) Toon voor $N = 4$, $M = 2$ aan, dat het proces reversibel is. Je mag hiervoor het rondjescriterium gebruiken. Zal dit ook voor algemene N en M waar zijn?

c) Bepaal de stationaire verdeling voor $N = 4$ en $M = 2$. Geef een formule voor de (stationaire) kans dat een aanvraag niet gehonoreerd kan worden.

TABEL: KANSEN STANDAARD NORMALE VERDELING

Laat $\underline{z}$ standaard normaal verdeeld zijn; notatie: $\underline{z} = N(0,1)$.
In onderstaande tabel staan de getallen $\mathbb{P}[0 \leq \underline{z} \leq z]$ voor $z = 0.00, 0.01, \ldots, 3.09$.
Voorbeeld: $\mathbb{P}[0 \leq \underline{z} \leq 1.56] = 0.4406$ (zie de rij van 1.5 en de kolom van .06).

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2375	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4191	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4805	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4872	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990