

Tentamen Besliskunde 3 (18 juni 2013, 10.00-13.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1, Stelling van Ore. Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met n knooppunten. De graad van een knooppunt x wordt genoteerd met $d(x)$. Bewijs de volgende bewering:

Als $d(v) + d(w) \geq n$ voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten $v, w \in V$, dan heeft G een Hamilton kring.

Opgave 2

Beschouw het probleem om n taken $\{J_1, \dots, J_n\}$ te schedulen op één machine. Taak J_i heeft due date d_i en bewerkingstijd p_i , $i = 1, \dots, n$.

Gevraagd: een schema S waarbij (1) het aantal taken waarvoor de due date overschreden wordt, minimaal is en (2) onder alle schema's met eenzelfde aantal taken waarvoor de due date overschreden wordt, heeft S de kortste bewerkingstijd.

Dit schema kan geconstrueerd worden m.b.v. het volgende algoritme.

Het algoritme van Moore

1. Orden de taken zodanig dat $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$; $S = \emptyset$; $p = 0$.
2. Voor $j = 1, 2, \dots, n$ doe:
 - a. $S := \{S, j\}$; $p := p + p_j$.
 - b. Indien $p > d_j$, dan: bepaal l zodat $p_l = \max_{k \in S} p_k$ en verwijder l uit S ; $p := p - p_l$.
3. $S := \{S, \{1, 2, \dots, n\} \setminus S\}$.

Toon deze bewering aan.

Opgave 3

Bewijs de volgende bewering.

Zij A een matrix met elementen $0, +1, -1$ met in iedere kolom hoogstens twee niet-nul elementen.

A is totaal unimodulair d.e.s.d. als de rijen van A in twee disjuncte deelverz. I_1 en I_2 zijn te verdelen zdd.

- (1) als twee niet-nul elementen uit dezelfde kolom hetzelfde teken hebben, dan behoren de bijbehorende rijen tot verschillende deelverz.
- (2) als twee niet-nul elementen uit dezelfde kolom verschillend teken hebben, dan behoren de bijbehorende rijen tot dezelfde deelverz.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Ruimteproeven hebben uitgewezen dat het DNA, dat gevonden is in organisch materiaal op Mars, bestaat uit 5 “symbolen” die we met de letters $\{a, b, c, d, e\}$ aanduiden, in plaats van de vier van aards DNA. De volgende reeksen van twee “symbolen” komen nooit voor: **cd**, **ce**, **ed** en **ee**. Elke sequentie die geen verboden reeks van twee symbolen bevat, kan voorkomen. De sequentie **bbcda** kan dus niet voorkomen, maar **bbdca** wel. Hoeveel sequenties van n symbolen zijn er mogelijk in Martiaans DNA?

We gaan ervan uit dat begin en einde van een sequentie onderscheiden kunnen worden. Voor $n = 2$ zijn er dan 21 mogelijkheden. Om het toegestane aantal te bepalen voor willekeurige n , willen we een recurrente betrekking opstellen. Het is niet direct duidelijk hoe die eruit moet zien. Het is eenvoudiger om eerst een gekoppeld stel recurrente betrekkingen op te stellen. Laat a_n het aantal DNA sequenties zijn van n symbolen die eindigen op **c** of **e**, en b_n het aantal dat daar niet op eindigt. Het uiteindelijke doel is om $a_n + b_n$ te berekenen.

a) Beargumenteer dat

$$a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ a_{n-1} + 2b_{n-1} & n \geq 2 \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 2a_{n-1} + 3b_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

b) Leid af dat $b_n = 4b_{n-1} + b_{n-2}$, $n \geq 3$.

c) Los de recurrente betrekking voor de rij $\{b_n\}_{n \geq 1}$ op.

d) Bereken nu het aantal toegestane sequenties $a_n + b_n$ van lengte n , $n \geq 1$.

Opgave 5

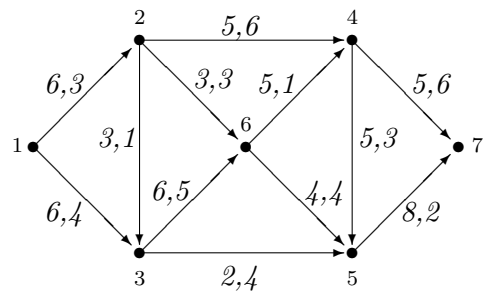
Beschouw een projectplanningsprobleem met activiteiten A, B, \dots, N . De tijdsduur van de activiteiten en de volgorde restricties staan in onderstaande tabel.

activiteit	tijdsduur	voorgangers	activiteit	tijdsduur	voorgangers
A	10	-	H	12	D,G,K
B	6	-	I	4	C,E
C	8	A,B	J	11	F,I
D	5	A	K	1	F,I
E	14	B	L	3	J,K
F	9	B	M	13	J,K
G	2	C,E	N	7	H,L

- Teken het projectnetwerk als graaf.
- Bepaal het kritieke pad en de speling van iedere activiteit.

Opgave 6

Bepaal een maximale stroom met minimale kosten van knooppunt 1 naar knooppunt 7 voor nevenstaand netwerk. De getallenparen bij de pijlen zijn de capaciteiten (het eerste getal) en de kosten (het tweede getal).



TABEL: KANSEN STANDAARD NORMALE VERDELING

Laat z standaard normaal verdeeld zijn; notatie: $z = N(0, 1)$.

In onderstaande tabel staan de getallen $\mathbb{P}[0 \leq z \leq z]$ voor $z = 0.00, 0.01, \dots, 3.09$.

Voorbeeld: $\mathbb{P}[0 \leq z \leq 1.56] = 0.4406$ (zie de rij van 1.5 en de kolom van .06).

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2375	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4191	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4805	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4872	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990