

Hertentamen Caleidoscoop

24 maart 2010 10.00-13.00 uur

Opgave 1

Voor welke reële getallen $x \in \mathbb{R}$ zijn de volgende beweringen waar?

- a) $2x = 10 \Leftrightarrow x = 7$,
- b) $\neg[3x < 21 \Rightarrow x \leq 5]$.

Opgave 2

- a) Laat zien dat er exact één lege verzameling bestaat.
- b) Heeft iedere begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ de *supremumeigenschap*?
- c) Bewijs dat $K_{5,5}$ niet vlak is. Indien je binnen dit bewijs een stelling gebruikt, formuleer deze stelling dan correct en volledig. Resultaten uit het college mogen zonder bewijs gebruikt worden.
- d) Formuleer het Lemma van Zorn.

Opgave 3

Schrijf in de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$:

- a) $\frac{3+i}{2-3i}$,
- b) $(-\cos(-\frac{1}{3}\pi) + i\frac{1}{2}\sqrt{3})^{654321+3 \cdot 2^{654321}}$.

Opgave 4

Op $\mathbb{Z}$ definiëren we de relatie $\propto$ als volgt:

$$a \propto b \Leftrightarrow [(ab)^3 \text{ is een kwadraat}].$$

- a) Laat zien dat dit geen equivalentierelatie definieert op $\mathbb{Z}$.
- b) Definieert de geïnduceerde relatie op $\mathbb{Z}_{>0}$ een equivalentierelatie op $\mathbb{Z}_{>0}$?

Opgave 5

Zij X de verzameling der oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{Z}$.

- a) Bewijs dat X overaftelbaar is. Hint: denk na.
- b) Is bij acceptatie van het keuzeaxioma X te voorzien van een welordening zodanig dat X een maximum heeft?