

Tentamen Caleidoscoop, de antwoorden

26 jan 2011 10.00-13.00 uur

Opgave 1

Voor welke reële getallen $x \in \mathbb{R}$ zijn de volgende beweringen waar?

- a) $2x \leq 10 \Leftrightarrow x > 5$: voor geen enkele x .
- b) $\neg[3x > 21 \Rightarrow x \leq 5]$: voor $x > 7$.

Opgave 2

- a) Zij G een 3-kleurbare graaf. Volgt hieruit dat G vlak is? Nee, $K_{3,3}$ is zelfs 2-kleurbaar en niet vlak.
- b) Is, bij verwerping van het keuzeaxioma, $\mathbb{Q}$ te voorzien van een welordening? Zeer zeker wel. De verzameling $\mathbb{Q}$ is aftelbaar. Kies een bijectie met $\mathbb{N}$ en kopieer de welordening van deze laatste via de bijectie naar $\mathbb{Q}$.
- c) Laat $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $b = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ twee equivalente rationale Cauchy-rijen zijn. Als a convergent in $\mathbb{Q}$ is, kan b dan divergent zijn in $\mathbb{Q}$? Nee. Laat $\epsilon > 0$ willekeurig gegeven zijn. Vanaf zekere index zijn zowel de a_i 's minder dan $\frac{1}{2}\epsilon$ van hun limiet x verwijderd als ook van b_i . Uit driehoeksongelijkheid volgt dat de b_i 's vanaf die index minder dan ϵ van x verwijderd zijn. De rij b_i is dus convergent met limiet x .

Opgave 3

Schrijf in de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$:

- a) $\frac{3-2i}{2-3i} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$
- b) $(\sin(\frac{2}{5}\pi) - i \cos(\frac{7}{5}\pi))^{987654321} = (e^{\frac{1}{10}\pi i})^{987654321} = e^{\frac{1}{10}\pi i}$.

Opgave 4

Op $\mathbb{Z}$ definiëren we de relatie $\approx$ als volgt:

$$a \approx b \Leftrightarrow [\exists n, m \in \mathbb{Z}_{>0} : a^n = b^m].$$

- a) Laat zien dat dit op $\mathbb{Z}$ een equivalentierelatie definieert: Uitschrijven. Alleen transitiviteit is beetje bijzonder: als $a^n = b^m$ en $b^p = c^q$, dan is $a^{np} = c^{qm}$.
- b) Laat zien dat voor alle a geldt: $a \approx a^2$: $(a)^2 = (a^2)^1$.
- c) Uit hoeveel elementen kan een equivalentieklasse onder $\approx$ bestaan? Uit 1 element (klasse van 0), uit 2 elementen (klasse van 1) en oneindig (iedere andere klasse, zie vraag b).

- d) Uit hoeveel elementen bestaat de quotiëntruimte? Oneindig veel. Twee verschillende priemgetallen zijn niet equivalent. Ieder priemgetal heeft dus al een 'eigen' klasse.

Opgave 5

Zij X een willekeurige verzameling.

- a) Bewijs de stelling van Cantor, namelijk dat X niet gelijkmachting is met zijn machtsverzameling $\wp(X)$. Zie dictaat.
- b) Bewijs dat X niet gelijkmachting is met $\wp(\wp(X))$. Stel er is een bijectie van de laatste naar de eerste. Dan zou die, opgevolgd door de natuurlijke injectieve afbeelding van X naar $\wp(X)$ een injectie opleveren van $\wp(\wp(X))$ naar $\wp(X)$. Er is echter ook een natuurlijke injectieve afbeelding van $\wp(X)$ naar $\wp(\wp(X))$. Dan bestaan er in beide richtingen injectieve afbeeldingen tussen $\wp(\wp(X))$ en $\wp(X)$. Uit Cantor-Bernstein zou dan volgen dat ze gelijkmachting zijn. Tegenspraak.