

Tentamen Caleidoscoop

26 jan 2011 10.00-13.00 uur

Opgave 1

Voor welke reële getallen $x \in \mathbb{R}$ zijn de volgende beweringen waar?

- a) $2x \leq 10 \Leftrightarrow x > 5$,
- b) $\neg[3x > 21 \Rightarrow x \leq 5]$.

Opgave 2

- a) Zij G een 3-kleurbare graaf. Volgt hieruit dat G vlak is?
- b) Is, bij verwerping van het keuzeaxioma, $\mathbb{Q}$ te voorzien van een welordening?
- c) Laat $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $b = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ twee equivalente rationale Cauchy-rijen zijn. Als a convergent in $\mathbb{Q}$ is, kan b dan divergent zijn in $\mathbb{Q}$?

Opgave 3

Schrijf in de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$:

- a) $\frac{3-2i}{2-3i}$,
- b) $(\sin(\frac{2}{5}\pi) - i \cos(\frac{7}{5}\pi))^{987654321}$.

Opgave 4

Op $\mathbb{Z}$ definiëren we de relatie $\approx$ als volgt:

$$a \approx b \Leftrightarrow [\exists n, m \in \mathbb{Z}_{>0} : a^n = b^m].$$

- a) Laat zien dat dit op $\mathbb{Z}$ een equivalentierelatie definieert.
- b) Laat zien dat voor alle a geldt: $a \approx a^2$.
- c) Uit hoeveel elementen kan een equivalentieklasse onder $\approx$ bestaan?
- d) Uit hoeveel elementen bestaat de quotiëntruimte?

Opgave 5

Zij X een willekeurige verzameling.

- a) Bewijs de stelling van Cantor, namelijk dat X niet gelijkmachting is met zijn machtsverzameling $\wp(X)$.
- b) Bewijs dat X niet gelijkmachting is met $\wp(\wp(X))$.