

Tentamen Caleidoscoop

30 mei 2011 10.00-13.00 uur

Opgave 1

Voor welke reële getallen $x \in \mathbb{R}$ zijn de volgende beweringen waar?

- a) $x = 0 \Rightarrow x = 1$,
- b) $\neg[x > 21 \Leftrightarrow x \geq 5]$.

Opgave 2

- a) Zij G een 1-kleurbare graaf. Volgt hieruit dat G vlak is?
- b) Is de verzameling der priemgetallen te voorzien van een lichaamsstructuur?
- c) Voor een vlakke representatie van een vlakke graaf is n het aantal knopen, m het aantal takken en r het aantal gebieden. Wat is de kleinste waarde die $n - m + r$ kan aannemen?

Opgave 3

Schrijf in de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$:

- a) $\frac{3+2i}{2-5i}$,
- b) $(-\sin(\frac{2}{5}\pi) + i \cos(\frac{7}{5}\pi))^{987654321}$.

Opgave 4

Zij p een priemgetal. Op $\mathbb{Z}_{>0}$ definiëren we de relatie $\approx_p$ als volgt:

$$a \approx_p b \Leftrightarrow [\forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : p^n | a \Leftrightarrow p^n | b].$$

- a) Laat zien dat dit op $\mathbb{Z}_{>0}$ een equivalentierelatie definieert.
- b) Voor welke $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt: $x \approx_p x^2$?
- c) Bewijs: $[\forall x, y \in \mathbb{Z}_{>0} : x \approx_p x^2 \wedge y \approx_p y^2] \Rightarrow x \approx_p y$.

Opgave 5

Zij X een verzameling met $|X| > 1$. We voorzien de verzameling van relaties op X van een partiële ordening: de *is deelverzameling van*-relatie: $\subseteq$. Tevens kunnen we van twee relaties op X altijd de doorsnede beschouwen.

- a) Bewijs dat de doorsnede van twee partiële ordeningen weer een partiële ordening is.
- b) Bewijs dat de doorsnede van twee verschillende lineaire ordeningen nooit lineair is.
- c) Wordt de verzameling der lineaire ordeningen (geïnduceerd geordend door $\subseteq$) lineair geordend door $\subseteq$?
- d) Wat is in de verzameling der lineaire ordeningen de maximale lengte van een keten?