Herkansing Commutative Algebra

26 augustus 2008, 9u - 13u

Organisatie:

- Vraag 1 vormt het **mondelinge gedeelte**. Dit mag je voorbereiden tussen 9u en 9u30 en daarna bespreken we het gedurende een 30-tal minuten.
- De andere vragen vormen het **schriftelijke gedeelte**. Hieraan mag je werken tot 13u. *Wees voldoende gedetailleerd. Als je een stelling uit het boek gebruikt, verwijs er dan op een duidelijke manier naar.*
- Je mag het volgende gebruiken: het boek van Eisenbud, *je eigen* oplossingen van het huiswerk, *persoonlijke handgeschreven* aantekeningen, alle informatie die op de website van het vak staat, pen en papier, eten en drinken.

Veel succes !

---

1. Leg het bewijs uit van de stelling die zegt dat een Artinse ring steeds Noethers is (gedeelte van Theorem 2.14). *Schrijf het bewijs over op een blad papier (met eventueel extra uitleg), dat is wat we zullen gebruiken tijdens de mondelinge bespreking.*

2. We beginnen met volgende definitie: een ideaal I in een ring R (met $I \neq R$) wordt *sterk irreducibel* genoemd als voor elk paar idealen A, B van R met $A \cap B \subseteq I$ geldt dat $A \subseteq I$ of $B \subseteq I$. Merk op dat een priemideaal sterk irreducibel is.

   (a) Bereken de sterk irreducibele idealen van $\mathbb{Z}$.

   (b) Toon aan: als I sterk irreducibel is, dan is I priem als en slechts als I radicaal is.

   (c) Toon aan dat in een Noetherse ring elk sterk irreducibel ideaal een primair ideaal is.

   (d) Zij k een lichaam. Geef een voorbeeld van een primair ideaal in $k[x, y]$ dat niet sterk irreducibel is.

   (e) Zij R een ring en U een multiplicatief gesloten deel van R. Zij $\varphi : R \to R[U^{-1}]$ de natuurlijke afbeelding. Zij

   $$C = \left\{\varphi^{-1}(I) \,|\, I \text{ ideaal in } R[U^{-1}]\right\}.$$

   Toon aan dat er een bijectie is tussen sterk irreducibele idealen van $R[U^{-1}]$ en sterk irreducibele idealen van R die disjunct zijn van U en die behoren tot C.

(f) Zij R een ring en noteer met $\mathrm{SSpec}(R)$ de verzameling van sterk irreducibele idealen van R. Definieer een topologie op $\mathrm{SSpec}(R)$ analoog aan de Zariskitopologie op $\mathrm{Spec}(R)$ en toon aan dat het inderdaad een topologie is.

3. In deze oefening veralgemenen we Corollary 10.13b voor een niet-Noetherse ring R. In dat geval gelden de ongelijkheden

$$1 + \dim R \leq \dim R[x] \leq 1 + 2 \dim R.$$

(a) Toon de eerste ongelijkheid rechtstreeks aan.

(b) Zij $f : R \to R[x]$ de inclusie en $f^* : \mathrm{Spec}(R[x]) \to \mathrm{Spec}(R)$ de geïnduceerde afbeelding. Zij P een priemideaal van R en $K = \frac{R_P}{PR_P}$ het residulichaam in P. Leg uit dat je de natuurlijke afbeeldingen

$$\mathrm{Spec}(R_P[x]) \to \mathrm{Spec}(R_P) \qquad \text{en}$$

$$\mathrm{Spec}(K[x]) \to \mathrm{Spec}(K)$$

kan beschouwen als beperkingen van f^*. Besluit dat het inverse beeld van P onder f^* homeomorf is met $\mathrm{Spec}(K[x])$.

(c) Toon de tweede ongelijkheid aan door gebruik te maken van het feit dat $\dim K[x] = 1$.