TENTAMEN ANALYSE 4. 16 augustus 2006. 10.00-13.00.

Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of ander passend commentaar.

---

1. Bereken m.b.v. contourintegratie:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}dx.$$

Schrijf het antwoord in de vorm van een reëel getal. (15 p)

2. Beschouw het polynoom $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 1$.

a. Laat zien dat voor alle nulpunten a van P geldt dat $|a| < 2$. (5 pt)

b. De reële en de imaginaire as verdelen het complexe vlak in vier kwadranten. Toon aan dat P in elk kwadrant precies één nulpunt heeft. (10 pt)

3. Bereken de som van de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ door de functie $f(z) = \dfrac{\cot(\pi z)}{(4z-1)^3}$ over een geschikte contour te integreren. (15 pt)

4a. Bepaal m.b.v. Laplacetransformatie een particuliere oplossing $y_p(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$y''(x) + 2y(x) = f(x) \quad (x > 0).$$

Hierbij is f een gegeven continue functie op $[0,\infty)$. Druk de oplossing uit in de vorm van een enkelvoudige integraal. (8 pt)

b. Hoe luidt de algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking voor positieve x? Motiveer je antwoord. (4 pt)

5. Los op m.b.v. Fouriertransformatie:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + ku_x(x,t) = 0 & \text{voor } x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & (x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

Hierbij is k een reëel getal en f is een op $\mathbf{R}$ continu differentieerbare functie zo, dat $f(x) \to 0$ als $|x| \to \infty$. Schrijf de oplossing zo mogelijk zonder integraal. (10 pt)