Tentamen Analyse 4

Maandag 16 juni 2008, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

---

1. Toon aan dat het polynoom $p(z) = z^7 + 3z^5 - 14z^3 + 9$ precies drie nulpunten (multipliciteiten meegerekend) in de open eenheidsschijf $D(0,1)$ heeft.

2. Beschouw de functie $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, -i, i\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

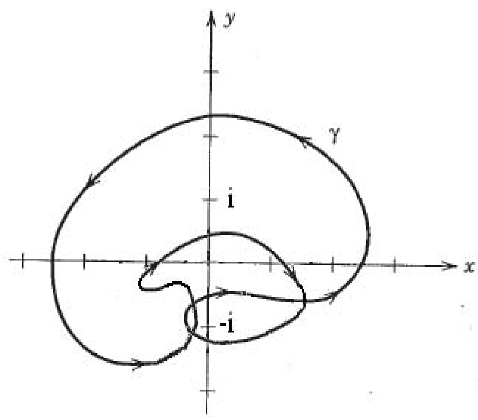
$$f(z) = \frac{e^{i/z}}{z^2+1} \quad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 0, -i, i).$$

(a) Bepaal voor ieder van de punten 0, $-i$ en i de aard van de singulariteit van f in het betreffende punt.

(b) Toon aan dat f een ophefbare singulariteit heeft in ∞.

(c) Bepaal in ieder van de polen van f het residu van f.

(d) Bereken $\oint_\gamma f(z)\,dz$, waarbij γ de contour in de onderstaande figuur is.



3. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Z.O.Z

4. Gegeven is de functie $g(z) = 1/(1 + 2z^2)$ op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak.

(a) Bepaal de machtreeks van g rond $z = 0$.

(b) Bepaal voor de afgeleide $g'(z) = -4z/(1 + 2z^2)^2$ de machtreeks rond $z = 0$.

(c) Verklaar, zonder de coëfficiënten ervan te gebruiken, waarom de convergentiestraal van de machtreeks in het vorige onderdeel gelijk is aan $1/\sqrt{2}$.

(d) Bepaal de Laurentreeks van g' op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\sqrt{2}\}$.

5. Zij $u\colon \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ een continue functie op de gesloten eenheidsschijf die harmonisch is op de open eenheidsschijf $D(0,1)$. Veronderstel dat $u(x,y) = x^2$ als (x,y) op de eenheidscirkel $\partial D(0,1)$ ligt.

(a) Toon aan dat $0 < u(x,y) < 1$ als $(x,y) \in D(0,1)$.

(b) Bereken $u(0,0)$.

6. Zij $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie.

(a) Bewijs dat $j\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door $j(z) = \overline{h(\bar{z})}$ voor $z \in \mathbb{C}$, eveneens een holomorfe functie is.

(b) Stel dat h de reële as in zichzelf afbeeldt, dus $h(z) \in \mathbb{R}$ als $z \in \mathbb{R}$. Bewijs dat dan $h(z) = \overline{h(\bar{z})}$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) Stel dat h zowel de imaginaire als de reële as in zichzelf afbeeldt. Bewijs dat dan $h(-z) = -h(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.
