Tentamen Analyse 4

Woensdag 20 augustus 2008, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

---

1. De functie $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeven door $f(z) = \sin z - 3z^2$ voor $z \in \mathbb{C}$, heeft een nulpunt in $z = 0$.

(a) Wat is de multipliciteit van het nulpunt 0 van f?

(b) Laat zien dat er in de open eenheidsschijf $D(0,1)$ nog precies 1 ander nulpunt van f ligt en dat de multipliciteit van dat nulpunt 1 is.

2. Beschouw de functie $f\colon \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad (z \in \mathbb{C},\ z \notin 2\pi i\mathbb{Z}).$$

(a) Bepaal voor ieder geheel getal k de aard van de singulariteit van f in het punt $2\pi ik$.

(b) Wat is de aard van de singulariteit van f in ∞?

(c) Bepaal in ieder van de polen van f het residu van f.

(d) Bereken de complexe lijnintegraal $\oint_{\partial D(0,8)} f(z)\,dz$ van f over de positief georiënteerde cirkel met straal 8 en middelpunt 0.

3. Bereken, geschreven als reëel getal, de integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/5}}{1+x^4}\,dx.$$

Z.O.Z

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{3z}{(z+1)(z-2)}$$

op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak.

(a) Bepaal de machtreeks van f rond $z = 0$.

(b) Wat is de convergentiestraal van de machtreeks van f rond $z = 0$?

(c) Bepaal de Laurentreek van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 3\}$.

(d) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 3\}$.

5. (a) De functie $u: D(0,1) \to \mathbb{R}$, gegeven door $u(x,y) = 3x^2y - y^3$ voor $(x,y) \in D(0,1)$, is harmonisch op de open eenheidsschijf $D(0,1)$. Bepaal alle harmonisch geconjugeerden van u op $D(0,1)$.

(b) Veronderstel dat een functie $u: D(0,1) \to \mathbb{R}$ harmonisch is op de open eenheidsschijf, dat u daar geen nulpunten heeft en dat de functie $1/u$ eveneens harmonisch is op $D(0,1)$. Bewijs dat u constant is.

6. (a) Laat $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie zijn en veronderstel dat er een $M \geq 0$ is, zodanig dat $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Dan is f constant. Bewijs deze zogeheten Stelling van Liouville.

(b) Laten $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfe functies zijn en veronderstel dat er een $M \geq 0$ is, zodanig dat $|f(z)| \leq M|g(z)|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Veronderstel dat g geen nulpunten heeft. Bewijs dat er een constante C bestaat zodanig dat $f(z) = Cg(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) Laten $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfe functies zijn en veronderstel dat er een $R \geq 0$ is, zodanig dat $|f(z)| \leq M|g(z)|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Bewijs dat er een constante C bestaat zodanig dat $f(z) = Cg(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Normering (onder voorbehoud): 1: 4 pt. 2: 6 pt. 3: 6 pt. 4: 5 pt. 5: 3 pt. 6: 3 pt.
Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/10.