Tentamen Analyse 4

Maandag 15 juni 2009, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 4 6 6 5 3 3
- Eindcijfer (onder voorbehoud): (som van de punten plus 3)/3.

---

1. Laat het polynoom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven zijn door $p(z) = z^{67} - 68z^3 + 67$.

(a) Toon aan dat p precies 67 nulpunten (multipliciteiten meegerekend) in de open schijf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ heeft.

(b) Toon aan dat, als $\varepsilon > 0$ voldoende klein is, er voor alle z met $|z| = 1 + \varepsilon$ de ongelijkheid $|z^{67} + 67| < |68z^3|$ geldt.

(c) Bepaal het aantal nulpunten (multipliciteiten meegerekend) van p in de gesloten eenheidsschijf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(d) Hoeveel *verschillende* nulpunten heeft p in de gesloten eenheidsschijf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$?

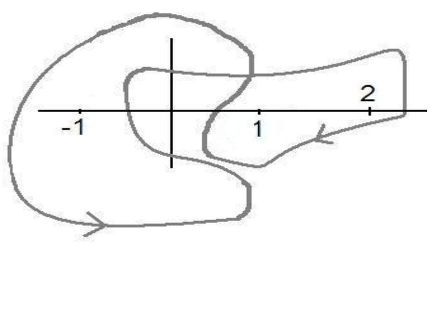
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{\sin(\pi z)}.$$

(a) Leg uit waarom f meromorf is.

(b) Bepaal voor alle polen van f het residu van f in de betreffende pool.

(c) Bereken $\oint_\gamma f(z)\, dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is.



3. De functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wordt voor $x > 0$ gegeven door

$$f(x) = \frac{\log(x)}{1 + x^4}.$$

We zetten f meromorf voort tot zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, waaruit de negatieve imaginaire as $\{iy : y \leq 0\}$ is verwijderd. De voortgezette functie noteren we weer als f.

(a) Laat zien dat het reële deel van de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ gelijk is aan de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

(b) Bereken, gebruikmakend van de residuenstelling, de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = z \sin\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)$$

op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak.

(a) Bepaal de Laurentreeks van f rond $z = 1$.

(b) Bepaal de aard van de singulariteit en het residu van f in $z = 1$.

5. (a) Toon aan dat het product

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n)$$

welgedefinieerd en holomorf is op $|z| < 1$.

(b) Bepaal de coëfficient van z^6 in de machtreeks van g rond $z = 0$.

6. Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie zijn zonder nulpunten.

(a) Leg uit waarom er een holomorfe functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bestaat, zodanig dat $h(z)^2 = f(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Stel dat $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een continue functie is, zodanig dat $g(z)^2 = f(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, en dat h een functie is als in het vorige onderdeel. Toon aan dat g gelijk is aan h of aan $-h$.
