Tentamen Analyse 4

Woensdag 19 augustus 2009, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 4 6 6 5 3 3.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. Zij a een complex getal met $|a| > e$ en laat n een geheel getal met $n \geq 1$ zijn. Toon aan dat de vergelijking

$$e^z = az^n$$

precies n verschillende oplossingen voor z in de gesloten eenheidsschijf $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ heeft.

2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

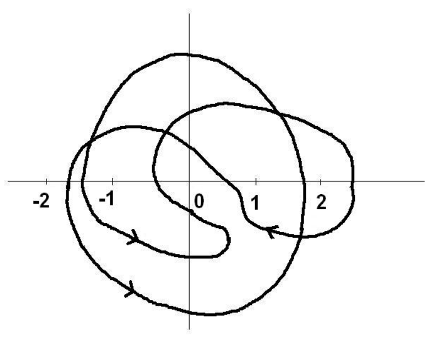
$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2}.$$

(a) Bepaal het type singulariteit van f in ∞.

(b) Bepaal voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit.

(c) Bepaal voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende singulariteit.

(d) Bereken $\oint_\gamma f(z)\,dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is.



3. Veronderstel dat $a > 0$ en zij $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -i, i\} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)} \quad (z \neq 0, -i, i).$$

(a) Wat is de orde van de pool van f in $z = 0$?

(b) Wat is, voor reële $x \neq 0$, het verband tussen het imaginaire deel van $f(x)$ en dat van $f(-x)$?

(c) Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(x^2+1)}\, dx.$$

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$$

op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak. Bepaal voor beide annuli $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ de Laurentreeks van f op de betreffende annulus.

5. (a) Is het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

convergent of divergent?

(b) Toon aan dat het produkt

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^2}\right)$$

voor iedere z in $\mathbb{C}$ convergeert en dat de aldus gedefinieerde functie f holomorf op $\mathbb{C}$ is.

(c) Wat zijn de nulpunten en de bijbehorende multipliciteiten van de functie f uit het vorige onderdeel? Motiveer uw antwoord.

6. (a) Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie zijn zodanig dat $\operatorname{Re} f(z) < 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Toon door e^f te beschouwen aan dat f constant is.

(b) Veronderstel dat $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfe functies zijn, dat h geen nulpunten heeft en dat er een $M \geq 0$ bestaat zodanig dat $|g(z)| \leq |z|^M |h(z)|$ voor alle z in $\mathbb{C}$. Toon aan dat er een polynoom p bestaat zodanig dat $g = ph$.