Tentamen Analyse 4

Maandag 14 juni 2010, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 4 6 6 5 3 3.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. Zij a een complex getal met $|a| < 1$, laat n een geheel getal met $n \geq 1$ zijn en definieer $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door $f(z) = (z-1)^n e^z - a$. Laat $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ het gesloten rechter halfvlak zijn.

(a) Veronderstel dat z in H een nulpunt is van f. Laat zien dat in dat geval $|z - 1| < 1$.

(b) Hoeveel nulpunten (met multipliciteit geteld) heeft f in H?

(c) Hoeveel *verschillende* nulpunten heeft f in H?

2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

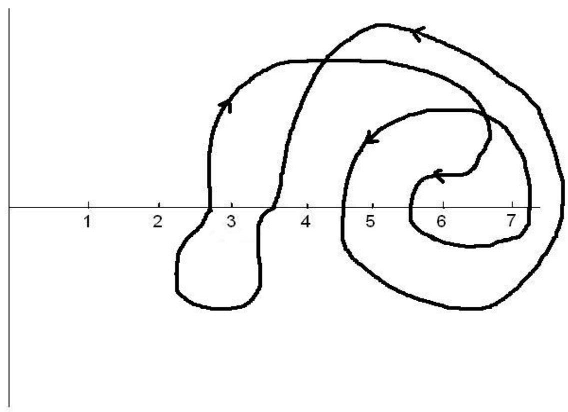
$$f(z) = \frac{1}{e^{12\pi i/z} - 1}.$$

(a) Bepaal het type singulariteit van f in ∞.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit.

(c) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende singulariteit.

(d) Bereken $\oint_\gamma f(z)\,dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is.



3. Laat zien[1] dat

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sin\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} + e^{1/(z-1)}$$

op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak.

(a) Bepaal de Laurentreeks van f op de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2\}$.

(b) Bepaal de aard van de singulariteit en het residu van f in het punt 1.

5. (a) Laat zien dat het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

voor iedere z in $\mathbb{C}$ convergeert en dat de aldus gedefinieerde functie holomorf op $\mathbb{C}$ is.

(b) Wat zijn de nulpunten van de functie uit het vorige onderdeel en de bijbehorende multipliciteiten?

(c) Veronderstel dat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf is, dat de nulpunten van f precies de gehele getallen $\mathbb{Z}$ zijn en dat al deze nulpunten multipliciteit 1 hebben. Toon aan dat er een holomorfe functie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is, zodanig dat voor alle z in $\mathbb{C}$ het volgende geldt:

$$f(z) = ze^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

6. Veronderstel dat de functies f en g holomorf zijn op geheel $\mathbb{C}$ en dat $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$ voor alle z in de open eenheidsschijf $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(a) Laat zien dat er een reële constante c bestaat zodanig dat $f(z) = g(z) + ic$ voor alle z in $D(0,1)$.

(b) Laat zien dat er een reële constante c bestaat zodanig dat $f(z) = g(z) + ic$ voor alle z in $\mathbb{C}$.

---

[1] Besteed, indien nodig, niet teveel tijd aan de eindberekening.