Tentamen Analyse 4

Woensdag 25 augustus 2010, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 4 6 6 5 3 3.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. Beschouw de vergelijking $z^5 + 15z + 1 = 0$, waarin z complex is.

(a) Laat zien dat deze vergelijking precies vier verschillende oplossingen in de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$ heeft.

(b) Laat zien dat deze vergelijking precies één oplossing buiten de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$ heeft en dat deze oplossing reëel is.

2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

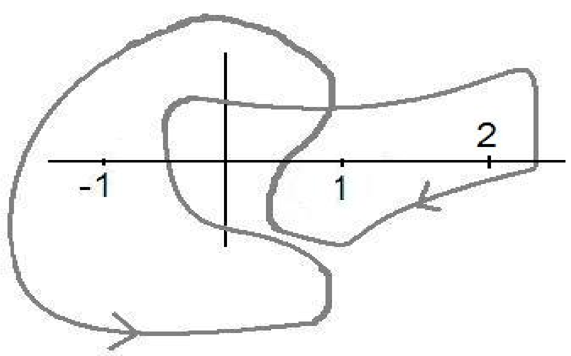
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2(z+1)}.$$

(a) Bepaal het type singulariteit van f in ∞.

(b) Bepaal voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit.

(c) Bepaal voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende singulariteit.

(d) Bereken $\oint_\gamma f(z)\,dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is.



3. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4}\,dx,$$

waarbij $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de gebruikelijke reëelwaardige logaritme op de strikt positieve reële getallen is.
Hint: deze logaritme kan uitgebreid worden tot een holomorfe functie op het complexe vlak, waaruit de negatieve imaginaire as $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ weggelaten is.

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{3z+4}{(z-2)(z+3)} + \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak.

(a) Bepaal de Laurentreeks van f op de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+1| < 3\}$.

(b) Bepaal de aard van de singulariteit en het residu van f in het punt -1.

5. (a) Het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

is convergent. Toon dit aan en bereken de waarde ervan.

(b) Laat zien dat het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z(z+1)}{n(n+1)}\right)$$

voor iedere z in $\mathbb{C}$ convergeert en dat de aldus gedefinieerde functie holomorf op $\mathbb{C}$ is.

(c) Wat zijn de nulpunten van de functie uit het vorige onderdeel en de bijbehorende multipliciteiten?

6. (a) Laat $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorf op de open eenheidsschijf zijn en veronderstel dat f daar geen nulpunten heeft. Veronderstel verder dat de functie $z \mapsto |f(z)|$ een minimum aanneemt op die open eenheidsschijf. Laat zien dat f constant is.

(b) Laat $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf op geheel $\mathbb{C}$ zijn. Veronderstel dat $|g(z)| \leq |z|^{2011/2010}$ voor alle z in $\mathbb{C}$ met $|z| \geq 2010$. Laat zien dat er a en b in $\mathbb{C}$ bestaan zodanig dat $g(z) = az + b$ voor alle z in $\mathbb{C}$.