Tentamen Analyse 4

Vrijdag 17 juni 2011, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 4 6 6 5 3 3.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. Laat $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ het complexe vlak zijn met de negatieve reële as verwijderd en zij $\log : U \to \mathbb{C}$ de gebruikelijke holomorfe tak van de logaritme op U met $\log 1 = 0$. Beschouw de functie $f : U \to \mathbb{C}$, gegeven door $f(z) = \log z - 4(z-2)^2$.

(a) Laat zien dat f precies twee nulpunten (met multipliciteit geteld) heeft in de open schijf $D(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$.

(b) Laat zien dat f precies twee verschillende nulpunten heeft in $D(2,1)$. (Hint: er is een oplossing mogelijk die zelfs laat zien dat die twee nulpunten beide reëel zijn.)

2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

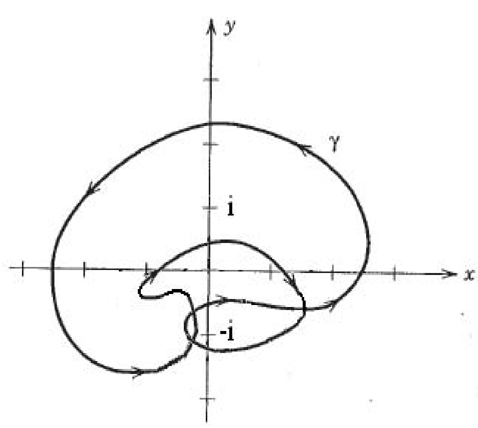
$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2+1}.$$

(a) Bepaal het type van de singulariteit van f in ∞.

(b) Bepaal voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit.

(c) Bepaal voor iedere pool van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende pool.

(d) Bereken $\oint_\gamma f(z)\,dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is.



Zie ommezijde

3. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4}\, dx,$$

waarbij log de gebruikelijke reëelwaardige logaritme is.

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = e^z + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-2}.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond i.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-4| < 3\}$.

5. (a) Is het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+2}$$

convergent of divergent? (Hint: beschouw eerst $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1}$.)

(b) Veronderstel dat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf is, dat de nulpunten van f precies de complexe getallen 2^n zijn, voor $n = 0, 1, 2, \ldots$, en dat deze nulpunten alle enkelvoudig zijn. Toon aan dat er een holomorfe functie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is, zodanig dat

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

6. Laten f en g holomorfe functies op de open eenheidsschijf $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ zijn, met g niet identiek 0, zodanig dat $|f(z)| \le |g(z)|$ voor alle $z \in D(0,1)$.

(a) Toon aan dat er een holomorfe functie h op $D(0,1)$ bestaat, zodanig dat $h(z) = f(z)/g(z)$ voor alle z met $g(z) \neq 0$.

(b) Veronderstel verder dat er een $z_0 \in D(0,1)$ bestaat met $g(z_0) \neq 0$ en $|f(z_0)| = |g(z_0)|$. Laat zien dat er een $c \in \mathbb{C}$ bestaat met $|c| = 1$ zodanig dat $f(z) = cg(z)$ voor alle $z \in D(0,1)$.

(c) Geldt de conclusie in (b) ook wanneer z_0 wel een nulpunt van g kan zijn?