Tentamen Analyse 4

Woensdag 10 augustus 2011, 14-17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 4 6 6 5 3 3.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. De functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = e^{-z} + z^2 - 4z + 4$.

(a) Laat zien dat f precies twee nulpunten (met multipliciteit geteld) heeft in de open schijf $D(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$.

(b) Laat zien dat f precies twee verschillende nulpunten heeft in $D(2,1)$.

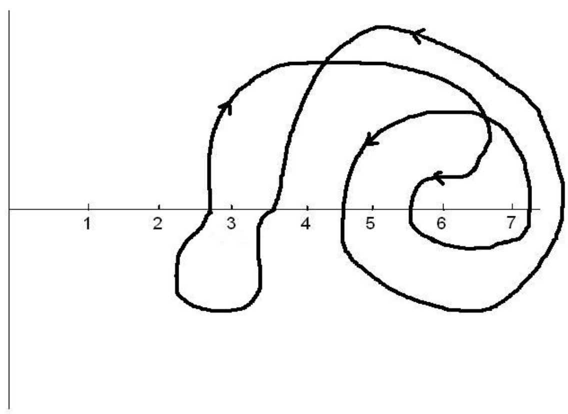
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)}.$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool. Licht uw antwoorden toe!

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\oint_\gamma f(z)\,dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is. U hoeft het antwoord niet te vereenvoudigen.



Zie ommezijde

3. Bereken, geschreven als reëel getal, de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\, dx.$$

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{3z-1}{z^2-1}.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $-4-4i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+2| < 3\}$.

5. (a) Toon aan dat het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

convergent is en bepaal de waarde ervan.

(b) Laat zien dat het produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+2)^2}\right)$$

voor iedere $z \in \mathbb{C}$ convergeert en dat de aldus gedefinieerde functie holomorf is op $\mathbb{C}$.

(c) Wat zijn de nulpunten van de functie uit het vorige onderdeel en de bijbehorende multipliciteiten?

6. (a) Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf zijn en veronderstel dat $f(z)$ reëel is voor alle z. Toon aan dat f constant is.

(b) Laat $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf zijn en veronderstel dat er $C \geq 0$ en $p \in \mathbb{R}$ bestaan, zodanig dat $|g(z)| \leq C\,(\log|z|)^p$ voor alle z met $|z| \geq 2$. Toon aan dat g constant is.